

Класическа механика - хармоничен осцилатор

Иво Илиев

1 Постановка

Нека разгледаме система в която тяло (материална точка) е закачено за неподвижна стена посредством пружина. Нека $y = 0$ да бъде равновесното положение на тялото. Тогава $y(t)$ ще е функция на изместването от равновесното положение на тялото с времето. Нека предположим че в началния момент $t = 0$:

$$y(0) = y_0 \quad \& \quad \frac{dy(0)}{dt} = v_0 \quad (1.1)$$

Знаем втория закон на Нютон, който за нашия едномерен случай има вида:

$$F_{net} = m\ddot{y} \quad (1.2)$$

Нека сега видим какви са оделните сили които действат на това тяло. От една страна имаме еластична сила, която се дава от закона на Хук:

$$F_H = -ky \quad (1.3)$$

където k е някаква константа характеризираща пружината.

Допълнително, имаме сила на триене, която се противопоставя на движението:

$$F_f = -c\dot{y}. \quad (1.4)$$

Ще предпологаме че триенето е пропорционално на скоростта. Тук c отново е константа, характеризираща тялото и повърхността по която се движи.

Ако предположим че на тялото не действат други сили, имаме нещо което се нарича **хармоничен осцилатор** - система която извършва движение под действието на еластична сила и триене:

$$F_{net} = F_H + F_f \quad (1.5)$$

или

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) - c\dot{y}(t) \quad (1.6)$$

Ако приемем че в нашата система няма триене, тоест $c = 0$, системата се свежда до система без дисипации, наричана още *прост хармоничен осцилатор*, зададена от следното обикновено диференциално уравнение от втори ред:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0 \quad (1.7)$$

2 Прост хармоничен осцилатор

Нека първо решим задачата когато в системата няма триене. Първо, удобно е да въведем нова константа $\kappa = \frac{k}{m}$. Тогава (1.7) придобива вида:

$$\ddot{y}(t) = -\kappa y(t) \quad (2.1)$$

Поне две функции решават това уравнение:

$$y(t) = \sin(\sqrt{\kappa}t) \quad y(t) = \cos(\sqrt{\kappa}t) \quad (2.2)$$

От курса по диференциални уравнения знаете, че общото решение на такава задача се дава като линейна комбинация тези решения:

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (2.3)$$

където $\omega_0 = \sqrt{\kappa}$. Сега трябва да наложим началните условия, за да намерим константите A и B :

$$y(0) = y_0 = A \cos(\omega_0 \cdot 0) + B \sin(\omega_0 \cdot 0) = A \quad (2.4)$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = v_0 = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 \cdot 0) = B\omega_0 \quad (2.5)$$

тоест

$$A = y_0 \quad B = \frac{v_0}{\omega_0} \quad (2.6)$$

с което решението добива вида:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (2.7)$$

Понякога е по-удобно да работим само с една тригонометрична функция, например синус. Знаем че:

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \quad (2.8)$$

Тогава за някаква константа C ,

$$C \sin(\omega_0 t + \phi) = C (\sin(\omega_0 t) \cos(\phi) + \cos(\omega_0 t) \sin(\phi)) \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C \cos \phi = \frac{v_0}{\omega_0} \\ C \sin \phi = y_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

решавайки системата получваме:

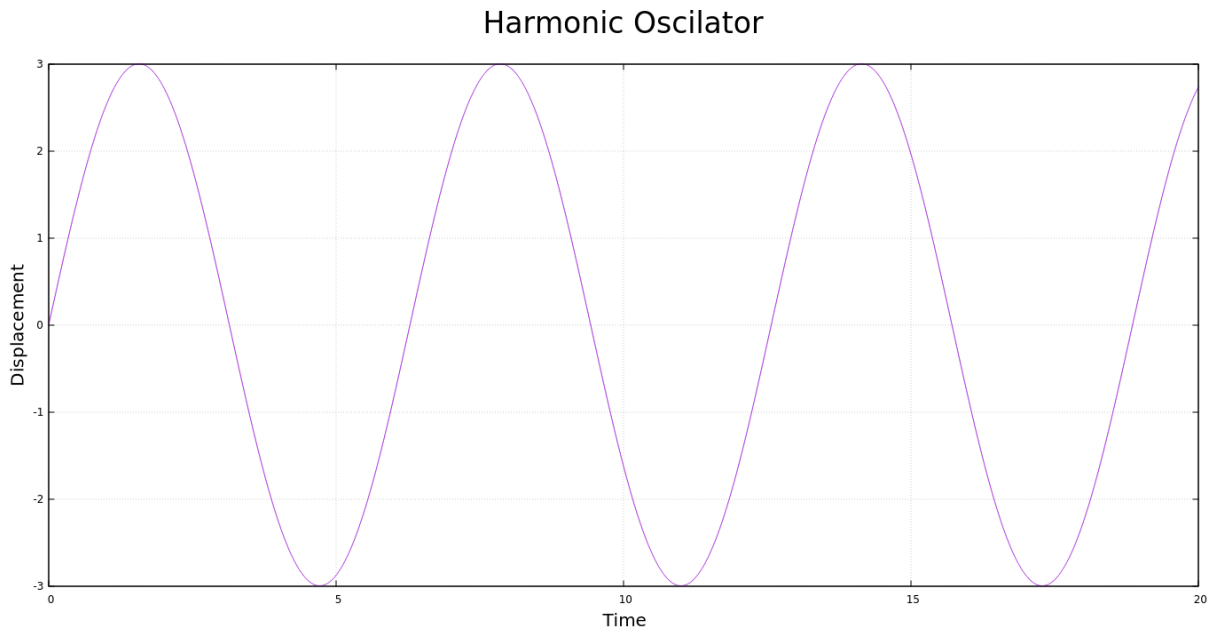
$$C^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + y_0^2 \quad (2.11)$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{\omega_0 y_0}{v_0}\right) \quad (2.12)$$

Или нашата система може да бъде записана с тези константи

$$y(t) = C \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.13)$$

Фигура 1: Графика на прост хармоничен осцилатор с $C = 3, \omega_0 = 1, \phi = 0$.



Алтернативно, задачата може да бъде решена чрез метода на характеристичното уравнение. Отново, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad (2.14)$$

Предполагаме че решението е експонента $y(t) = e^{rt}$.

$$\dot{y}(t) = r e^{rt}, \quad \ddot{y}(t) = r^2 e^{rt} \quad (2.15)$$

Връщайки тези пробни решения в уравнението за осцилатора получаваме:

$$r^2 e^{rt} + \omega_0^2 e^{rt} = 0 \quad (2.16)$$

За да имаме решение, трябва да е вярно че

$$r^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow r = \pm i\omega_0 \quad (2.17)$$

Тоест, получаваме две решения

$$y(t) = e^{i\omega_0 t} \quad \& \quad y(t) = e^{-i\omega_0 t} \quad (2.18)$$

Отново всяка линейна комбинация от решения също е решение, което дава общото решение:

$$y(t) = A^* e^{i\omega_0 t} + B^* e^{-i\omega_0 t} \quad (2.19)$$

Прилагайки тъждеството на Ойлер, може да покажем че това решение е еквивалентно на предходното което получихме в термини на тригонометрични функции.

3 Затихващи трептения

Нека сега не игнорираме силата на триене. Както споменахме, уравнението описващото динамиката на осцилатора е:

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) - c\dot{y}(t) \quad (3.1)$$

Ще е по-удобно да разделим на масата, скривайки я в другите константи - по този начин коефициентът пред старшата производна става равен на единица:

$$\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = 0 \quad (3.2)$$

Това уравнение също може да бъде решено по метода на характеристично уравнение - предполагаме експоненциално решение $y(t) = e^{rt}$, тогава $\dot{y}(t) = re^{rt}$ и $\ddot{y}(t) = r^2e^{rt}$. Замествайки в (3.2) получаваме:

$$r^2e^{rt} + Cre^{rt} + Ke^{rt} = 0 \quad (3.3)$$

Това може да е изпълнено само когато $r^2 + Cr + K = 0$. Следователно:

$$r = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad (3.4)$$

Както виждаме, имаме 3 принципно различни случая в зависимост от знака на дискриминантата, нека я означим с D .

3.1 $D < 0$

В този случай се вижда че величината

$$\gamma \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-D} = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - C^2} \quad (3.5)$$

е положителна. Тогава имаме

$$r_{\pm} = -\frac{1}{2}C \pm i\gamma \quad (3.6)$$

Решенията тогава имат вида

$$y(t) = e^{-(C/2 \pm i\gamma)t} \quad (3.7)$$

Използвайки формулата на Ойлер можем да пренапишем този израз като

$$y(t) = e^{-(C/2)t} (\cos(\gamma t) \pm i \sin(\gamma t)) \quad (3.8)$$

Трябва да отбележим че търсим само реални решения. Тъй като уравнението е линейно и хомогенно, линейни комбинации от решения също са решения. Но последното уравнение е точно това, следователно реалната и имагинерната му част поотделно също трябва да удовлетворяват диференциалното уравнение. Следователно общото решение има вида

$$y(t) = e^{-(C/2)t} (A \cos(\gamma t) + B \sin(\gamma t)). \quad (3.9)$$

Началните условия имат вида

$$y(0) = y_0 = A \quad (3.10)$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = v_0 = -\frac{C}{2}A + B\gamma \quad (3.11)$$

Тогава

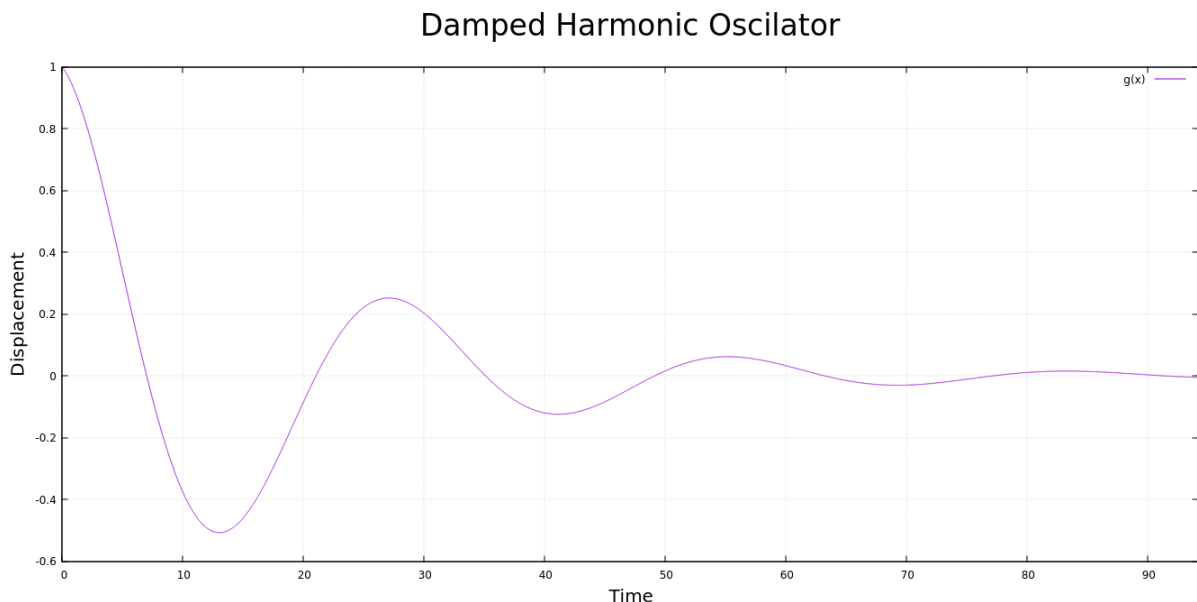
$$A = v_0 \quad (3.12)$$

$$B = \frac{Cv_0}{2\gamma} + \frac{v_0}{\gamma} \quad (3.13)$$

Или финално

$$y(t) = e^{(-C/2)t} \left(y_0 \cos(\gamma t) + \left(\frac{Cv_0}{2\gamma} + \frac{v_0}{\gamma} \right) \sin(\gamma t) \right) \quad (3.14)$$

Фигура 2: Затихващи трептения със стойности $C = 0.1, \omega_0 = 0.3, y_0 = 1, v_0 = 0$.



3.2 $D = 0$

В този случай $r = -\frac{C}{2}$ и $C = 2\omega_0$, тоест $r = -\omega$. Тогава едно от решенията има вида

$$y_1(t) = e^{-\omega_0 t} \quad (3.15)$$

От курса по ОДУ си спомняме че за такива уравнения общото решение има вида

$$y(t) = (A + Bt)e^{\omega_0 t}. \quad (3.16)$$

В термини на константите A и B началните условия са

$$y_0 = A \quad (3.17)$$

$$v_0 = B - A\omega \quad (3.18)$$

следователно

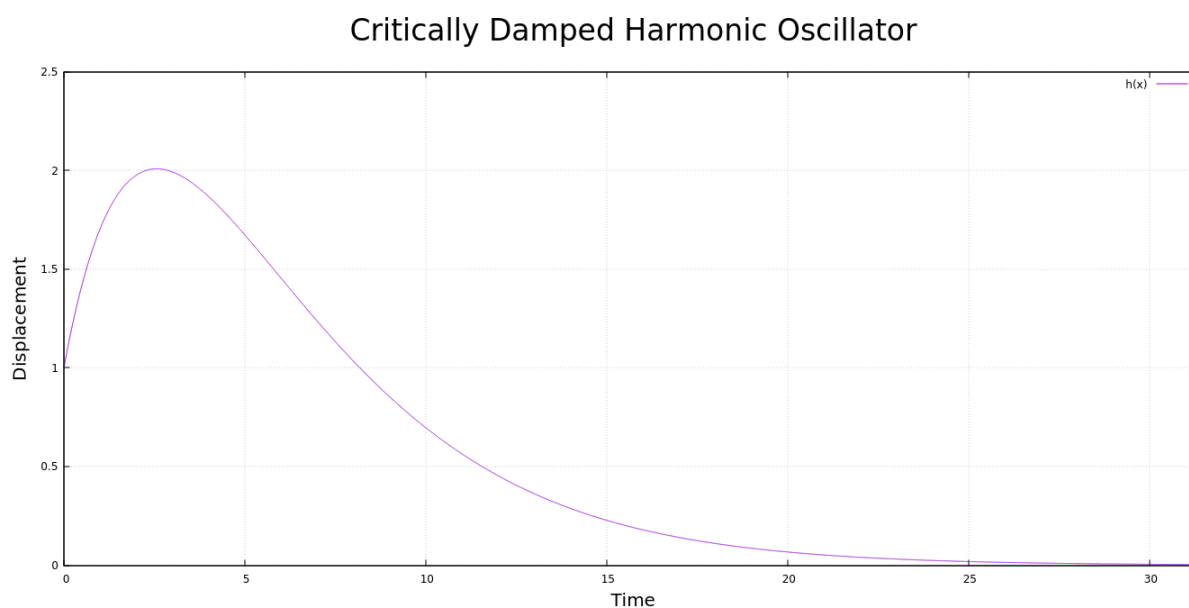
$$A = y_0 \quad (3.19)$$

$$B = v_0 + \omega_0 y_0 \quad (3.20)$$

Или финално

$$y(t) = (y_0 + (v_0 + \omega_0 y_0)t)e^{-\omega_0 t} \quad (3.21)$$

Фигура 3: Критично затихващи трептения със стойности $\omega_0 = 0.3$, $y_0 = 1$, $v_0 = 1$.



3.3 $D > 0$

Както и преди показваме как изглежда общото решение, което в този случай има вида

$$y(t) = Ae^{r_- t} + Be^{r_+ t} \quad (3.22)$$

Началните условия са:

$$y_0 = A + B \quad (3.23)$$

$$v_0 = Ar_- + Br_+ \quad (3.24)$$

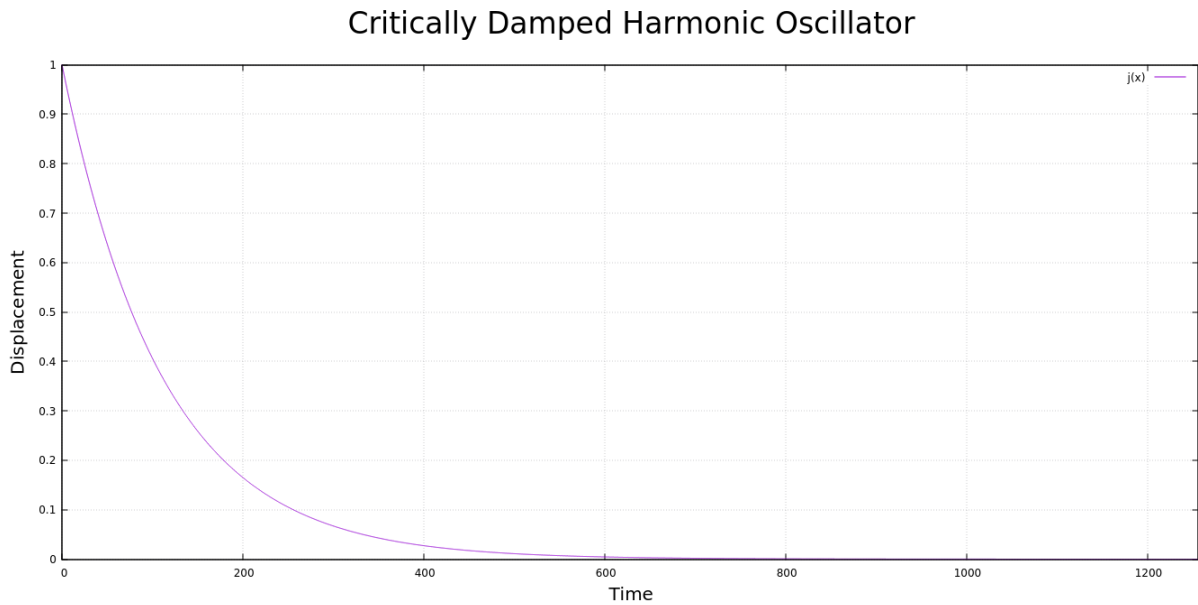
и от тук

$$A = y_0 - \frac{r_- y_0 - v_0}{r_- - r_+} \quad (3.25)$$

$$B = \frac{r_- y_0 - v_0}{r_- - r_+} \quad (3.26)$$

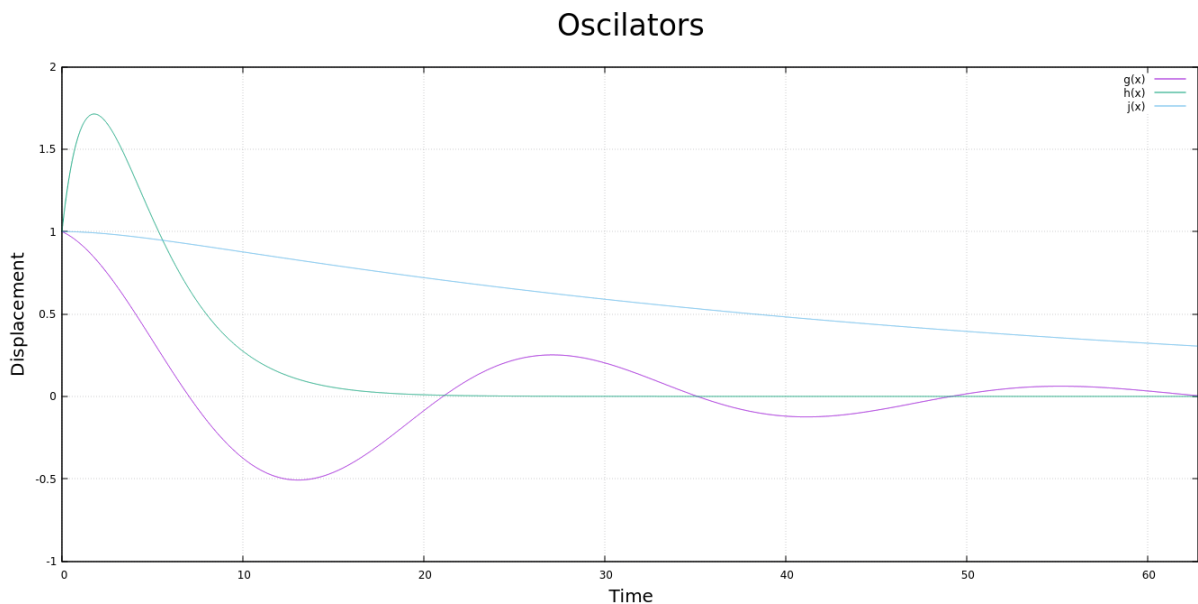
Това което забелязваме е че в този режим съпротивлението е толкова силно че нарушава каквато и да е периодичност - свеждаме движението до експоненциално затихване.

Фигура 4: "Презатихващи" трептения със стойности $C = 0.3, \omega_0 = 0.075, y_0 = 1, v_0 = 1$.



4 Заключение

Приключваме секцията със следната графика илюстрираща трите случая - при единия (underdamping) имаме затихване на амплитудата с времето, при втория (critical damping) ведна се уравновесяват силите на триене и еластичната сила и ефективно имама само един полупериод и третия (overdamping) при който силите на триене са толкова по-големи че напълно разрушават периодичността и динамиката е аperiодична.



Класическа механика - хармоничен осцилатор 2

Иво Илиев

1 Прост осцилатор с външна сила

Нека сега разгледаме прост хармоничен осцилатор ($c = 0$, тоест нямаме триене) в присъствието на външна периодична сила

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (1.1)$$

За яснота, с ω ще отбелязваме честота на външната сила, а с ω_0 , както и преди, естествената честота на осцилатора (тоест, игнорирайки затихването, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$).

1.1 $\omega \neq \omega_0$

Хомогенната част на това уравнение е простия хармоничен осцилатор, чиито решения познаваме. За да решим нехомогенното търсим и едно частно решение. Получаваме (ако не сте убедени, разпишете внимателно):

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega t) \quad (1.2)$$

Виждаме че при $\omega \rightarrow \omega_0$ амплитудата на третия член y_p (частното решение) нараства. Това ни навежда на мисълта че при равни честоти имаме нещо по-различно от синусоидална функция.

1.2 Биене (на английски - Beats)

Нека разгледаме простите начални условия $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$. Това налага $C_1 = -F_0/(m(\omega^2 - \omega_0^2)), C_2 = 0$, което дава следния вид за решението:

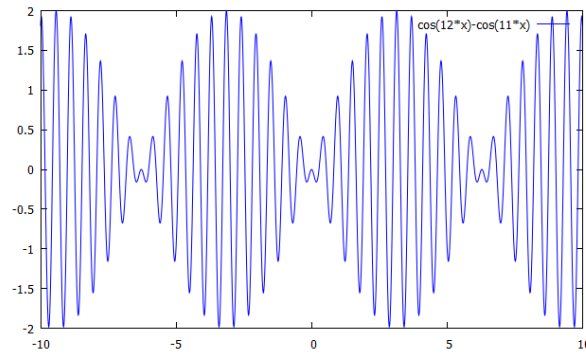
$$y(t) = \frac{F}{(m(\omega^2 - \omega_0^2))} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)). \quad (1.3)$$

Разликата от двата косинуса може да се представи като произведение от два синуса:

$$y(t) = \frac{2F}{(m(\omega^2 - \omega_0^2))} \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \quad (1.4)$$

Сега, ако $\omega \approx \omega_0$, този израз може да се мисли като произведение между

$$\sin\left(\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}\right) \quad \text{and} \quad \frac{2F}{(m(\omega^2 - \omega_0^2))} \sin\left(\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right). \quad (1.5)$$



Фигура 1: Биене - честотите са $\omega = 12, \omega_0 = 11$

Тъй като $\omega \approx \omega_0$, $|\omega_0 - \omega|$ е малко, първия израз е с много по-голяма честота от втория. Тоест, нашето решение има високочестотна осцилация с амплитуда модулирана от носкочестотна осцилация. Този ефект, получен от наслагване на близкочестотни трептения се нарича **биене**. Вие най-вероятно сте наблюдавали този ефект в практикума по механика при свързани махала. От гледна точка на всяко махало, другото махало е източник на външна периодична сила. Този експеримент може да видите тук <https://www.youtube.com/watch?v=CjJVBvDNxcE>.

1.3 $\omega = \omega_0$: Резонанс

Решението на нашето уравнение в този случай е малко по-различно - можем да видим че $y_p(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ не може да е частното решение тъй като всеки член решава също и хомогенното уравнение. От курса по ОДУ знаем че в такъв случай трябва да умножим нашето предположение по еволюционния параметър- $y_p(t) = At \cos(\omega_0 t) + Bt \sin(\omega_0 t)$. Виждаме че частното решение на уравнението е осцилация при която амплитудата расте линейно със t . Този феномен наричаме **резонанс**. Ако заместим това решение в уравнението получаваме:

$$-2m\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + 2m\omega_0 B \cos(\omega_0 t) = F \cos(\omega_0 t) \quad (1.6)$$

За да може това да е изпълнено за всяко t трябва задължително

$$A = 0, \quad B = F/(2m\omega_0) \quad (1.7)$$

Тоест, общото решение на (1.1) за случая на еднакви честоти се задава от

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (1.8)$$

2 Осцилатор с присъствие на външна сила и триене

Хармоничен осцилатор със затихване и външна периодична сила (driven damped harmonic oscillator) се задава от уравнението:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(x) + ky(t) = F_0 \cos \omega t \quad (2.1)$$

Един трик за по-лесно решаване на това уравнение е да си представим хармоничното движение като реалната част на кръгово движение в комплексната равнина. Съответното уравнение е:

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(x) + kz(t) = F_0 e^{i\omega t}, \quad (2.2)$$

което е еквивалентно на уравнения за реалната и имагинерната части:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(x) + ky(t) = F_0 \cos \omega t \quad \text{and} \quad m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(x) + kx(t) = F_0 \sin \omega t \quad (2.3)$$

Функцията $F_0 e^{i\omega t}$ описва точка движеща се в комплексната равнина по окръжност с радиус F_0 с постоянна ъглова скорост ω . Реалната част на тази функция е оригиналната външна сила в задачата. Очевидно, това уравнение има решение от вида $z = Ae^{i\omega t}$. Замествайки това решение в уравнението, получаваме:

$$(-m\omega^2 + i\omega c + k)A = F_0. \quad (2.4)$$

Величината в скобите също е комплексно число. Нека го запишем в полярна форма:

$$(-m\omega^2 + i\omega c + k) = \rho e^{i\theta}. \quad (2.5)$$

Ясно е че:

$$\rho = \sqrt{(k - m\omega)^2 + \omega^2 c^2}, \quad (2.6)$$

и

$$\tan \theta = \frac{\omega c}{k - m\omega^2}. \quad (2.7)$$

Тоест, за комплексната константа имаме

$$A = \frac{F_0}{\rho} e^{-i\theta}. \quad (2.8)$$

Тоест, достигахме до следното решение за комплексното диференциално уравнение

$$z = \frac{F_0}{\rho} e^{i(\omega t - \theta)}. \quad (2.9)$$

Това което наблюдаваме ние като частно решение е реалната част на тази функция, тоест

$$y_p(t) = \operatorname{Re}(z(t)) = \frac{F_0}{\rho} \cos(\omega t - \theta) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega)^2 + \omega^2 c^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega c}{k - m\omega^2}\right)\right) \quad (2.10)$$

Виждаме че "отговора" на системата спрямо външната сила "закъснява" с фаза θ . Както винаги, общото решение на (2.2) е сбор на решението на хомогенното уравнение и на частното решение на нехомогенното. От миналия семинар (когато решавахме хомогенното уравнение) си спомняме че когато имаме триене решението клони към

нула при увеличаване на t . В английската литература, решението на хомогенното уравнение се нарича transient solution, а частното решение y_p се нарича steady state response.

Можем да оценим кога отклика на системата поради влиянието на външната сила ще е най-голям. Виждаме че системата ще бъде най-силно афектирана от външната сила когато е "underdamped" (случаят $D < 1$ от миналия семинар) и честотата на външната сила е същата като естествената честота на системата ω_0 .

За системи със слабо затихване, ако движещата сила е с честота близка до естествената, амплитудите на трептене могат да станат много големи. Можем да описваме количествено резонансите посредством "качествения фактор" (по-често наричен просто Q-фактор):

$$Q = \frac{\sqrt{mk}}{c} \quad (2.11)$$

За $Q < 1/2$ решенията са "презатихващи" и резонансната честота е 0. За $Q > 1/2$, системата е слабо затихваща и резонанса става по-силен за по-големи Q . Отново, за всеки от трите случая картината на еволюцията на трептенето е различна. За домашно може да се опитате да начертаете трите случая с някакъв софтуер и да видите поведението на решенията. FOSS софтуер работещ под GNU/Linux, M\$ Windows, OSX за тази работа например е Gnuplot (<http://www.gnuplot.info/>) След като си поиграте със софтуера най-вероятно ще стигнете до изводите, които са представени в следващата секция.

3 Заключение

1. Когато нямаме триене, наблюдаваме биене когато честотата на външната сила е близка (но все пак различна) от естествената честота на системата.
2. Когато нямаме триене, наблюдаваме резонанс когато честотата на външната сила е същата като честотата на осцилатора.
3. Когато имаме триене, хомогенното решение затихва до нула с времето, тоест поведението на системата се определя от частното решение.
4. Когато имаме триене, поведението на системата след време не зависи от началните условия.
5. Амплитудата на трептенето след достатъчно време (steady state) зависи от всички параметри на задачата.

Следващия семинар ще е свързан с чертаене на фазови портрети за разгледаните досега системи.

Класическа механика - Фазови портрети

Иво Илиев

1 Описание като динамични система

Вторият закон на Нютон за едномерни системи има вида

$$m\ddot{x} = F(x). \quad (1.1)$$

Както знаем, една система е консервативна, ако силата която действа е консервативна, тоест ако силата се поражда от потенциал $F = -dU/dx$. Пълната механична енергия,

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x), \quad (1.2)$$

се запазва за такива системи. Това се проверява директно:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \right] \\ &= [m\ddot{x} + U'(x)] \dot{x} \\ &= [F(x) - F(x)] = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Оказва че се факта че енергията е запазваща се величина ни позволява да редуцираме уравненията за движение от втори ред до първи ред (използваме 1.2):

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}. \quad (1.4)$$

Забележете че енергията тук се явява като интеграционна константа. Знакът \pm зависи от посоката на движение. Нека разгледаме точките $x(E)$ които удовлетворяват

$$E = U(x) \Rightarrow x(E) = U^{-1}(E), \quad (1.5)$$

където U^{-1} е обратната функция на потенциала (предполагаме че съществува). Тези точки ще наричаме **точки на обръщане**. Ако пълната енергия на системата е E , движението на системата е ограничено от точките на обръщане и затворено в региона $U(x) \leq E$. Можем да интегрираме 1.2 за да получим

$$t(x) - t(x_0) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}. \quad (1.6)$$

Обръщайки зависимостта, получаваме $x(t)$. Трябва да отбележим че вече имаме две константи на интегриране E и x_0 . Тъй като енергията е свързана със скоростта:

$$E = E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0), \quad (1.7)$$

можем да смятаме x_0 и v_0 като нашите интеграционни константи. Важното е че имаме две независими интеграционни константи. Очевидно ако искаме да намерим периода на движение между две точки на обръщане просто удвояваме 1.6:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}. \quad (1.8)$$

1.1 Пример - прост хармоничен осцилатор

За случая на прост хармоничен осцилатор имаме $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, следователно

$$\frac{dt}{dx} = \pm \sqrt{\frac{m}{2E - kx^2}} \quad (1.9)$$

Очевидно точките на обръщане са

$$x_{\pm}(E) = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad (1.10)$$

за $E \geq 0$. Задачата вече сме я решавали, но използвайки енергетични принципи можем да облекчим решението. Нека заместим,

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta. \quad (1.11)$$

Намираме

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \sqrt{\frac{m}{2E - kx^2}} = \sqrt{\frac{m}{2E - 2E \sin^2 \theta}} \\ \frac{dt}{dx} &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Следователно

$$\begin{aligned} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta} &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{1}{\cos \theta} \\ \frac{dt}{d\theta} &= \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Решението на това уравнение е очевидно $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$, където $\omega = \sqrt{k/m}$ е честотата на осцилатора. Пълното движение тогава се дава от

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \theta_0). \quad (1.14)$$

2 Едномерни механични задачи като динамична система (Преговор с разширение от ОДУ)

От курса по диференциални уравнения знаем че можем да запишем едно ОДУ от втори ред като система от две "зацепени" диференциални уравнения от първи ред:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (2.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}F(x). \quad (2.2)$$

Можем да запишем система в матрично-векторен вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m}F(x) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Това е пример за нещо което се нарича **динамична система**. Динамичните системи общо се задават от

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{V}(\varphi), \quad (2.4)$$

тук φ е N -мерен вектор във **фазовото пространство**. Обекта $\mathbf{V}(\varphi)$ се нарича векторно поле. Самият той е вектор, съществуващ във всяка точка от фазовото пространство \mathbb{R}^N . В общия случай всяка от компонентите на \mathbf{V} е функция на всички компоненти на φ :

$$V_j = V_j(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \quad (j = 1, \dots, N). \quad (2.5)$$

Решенията на уравнение (2.4) се наричат **интегрални криви**. Всяка интегрална крива се определя еднозначно от N интеграционни константи - те могат да бъдат избрани да са началните условия $\varphi(0)$. Множеството от интегрални криви се нарича **фазов портрет** на динамичната система.

Рисуването на фазовия портрет за една динамична система изисква първо да сме намерили решение на системата за произволни начални условия. В общия случай това е трудна задача, която може да се анализира само числено. За консервативни механични системи в едно измерение обаче, задачата се оказва тривиална. Причината за това е запазването на енергията - скоростта става една двузначна функция на позицията $v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$. Фазовите криви, тогава, са кривите които отговарят на постоянна енергия.

2.1 Скициране на фазови криви

Скицирането на фазови криви се прави по следните стъпки:

1. Скицираме потенциала $U(x)$.
2. Под тази графика, скицираме графиката на функцията $v(x; E) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$.
3. Когато E съвпада с локален екстремум на $U(x)$, казва се че системата се намира във **фиксирана точка**.

- (а) Ако E е малко над E_{\min} , фазовите криви са елипси
- (б) Ако E е малко под E_{\max} , фазовите криви са хиперболи.
- (в) Ако $E = E_{\max}$, фазовата крива се нарича **сепаратриса (separatrix)**.
- (г) Когато $E > U(\infty)$ или $E > U(-\infty)$, наричаме движението **неограничено**.
- (д) Рисуваме стрелки по фазовите криви - надясно за $v > 0$ и наляво за $v < 0$.

Периода на орбитата $T(E)$ има просто геометрична интерпретация. Наистина, площта A във фазовото пространство заградена от ограничена фазова крива е:

$$A(E) = \oint_E v dx = \sqrt{\frac{8}{m}} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} dx' \sqrt{E - U(x')}. \quad (2.6)$$

Тогава периода е пропорционален на скоростта на изменение на площта с енергията:

$$T = m \frac{\partial A}{\partial E}. \quad (2.7)$$

3 Примери за консервативни едномерни системи

3.1 Хармоничен осцилатор

Спомняме си че за хармоничния осцилатор потенциалната енергия беше $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Уравнението за движение е:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} = -kx. \quad (3.1)$$

Нека въведем означението $v = \dot{x}$. Можем да запишем горното уравнение като $N = 2$ система,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Вече сме показвали, че решенията имат вида:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (3.3)$$

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) - \omega x_0 \sin(\omega t). \quad (3.4)$$

Фазовите криви са елипси:

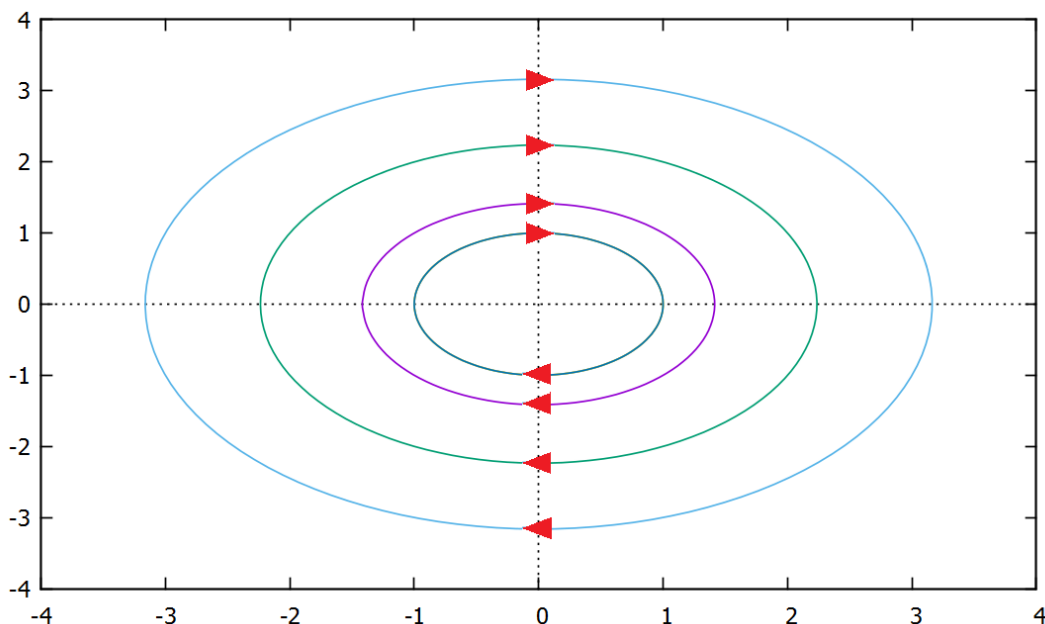
$$\omega_0 x^2(t) + \omega_0^{-1} v^2(t) = C, \quad (3.5)$$

където C е константа, независеща от времето. Трябва да се отбележи че x и v имат различни размерности. Знаем че енергията се запазва,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}, \quad (3.6)$$

и от тук можем да намерим малката и голямата полуос на елипсите:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (3.7)$$



Фигура 1: Фазов портрет на прост хармоничен осцилатор

Площта (2.6) е лесно изчислима:

$$A(E) = \pi x_{\max} v_{\max} = \frac{2\pi E}{\sqrt{mk}}. \quad (3.8)$$

Периодът на движението тогава е

$$T(E) = m \frac{\partial A}{\partial E} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (3.9)$$

което е независимо е от E , както и ние знаем.

3.2 Математическо махало

Нека сега разгледаме математическото махало - материална точка с маса m закачен на безмасова недеформируема нишка с дължина l . Потенциалът е $U(\theta) = -mgl \cos(\theta)$ и от тук

$$ml^2 \ddot{\theta} = -\frac{dU}{d\theta} = -mgl \sin(\theta). \quad (3.10)$$

Това е еквивалентно на

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\omega_0^2 \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Тук с ω сме отбелязали ъгловата скорост $\omega = \dot{\theta}$, а с ω_0 , както винаги, сме отбелязали естествената честота (за малки осцилации). Пълната механична енергия,

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + U(\theta). \quad (3.12)$$

Нека предположим че в началния момент махалото е било в покой ($\dot{\theta} = 0$ с отклонено на ъгъл $\theta = \theta_0$). Тогава,

$$\frac{2E}{ml^2} = \dot{\theta}^2 - 2\omega_0^2 \cos \theta = -2\omega_0^2 \cos \theta_0 \quad (3.13)$$

Периода на движение за амплитуда θ_0 е равен на

$$T(\theta_0) = \frac{\sqrt{8}}{\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \frac{4}{\omega_0} K\left(\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0\right), \quad (3.14)$$

където $K(z)$ е пълния елиптичен интеграл от първи род. Това е неприятна, но добре изучена специална функция. Известно е че тя може да бъде представена като степенен ред по полиномите на Лежандър:

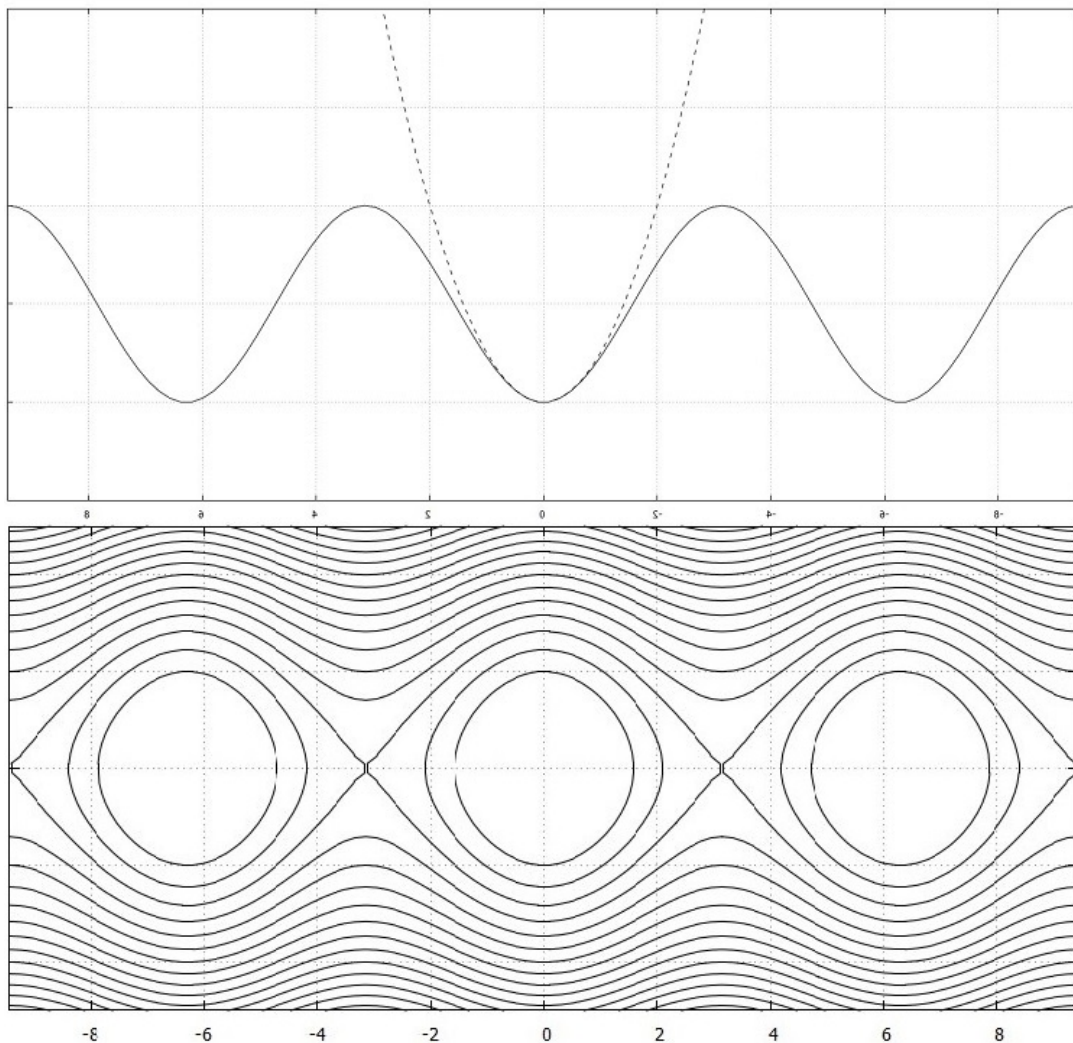
$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (P_{2n}(0))^2 k^{2n}, \quad (3.15)$$

което пък от своя страна е еквивалентно на

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n} + \dots \right). \quad (3.16)$$

Замествайки с нашия аргумент в израза за периода получаваме

$$T(\theta_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) + \dots \right\}. \quad (3.17)$$



Фигура 2: Фазов портрет на математическо махало

За $\theta \Rightarrow 0$, периода клони към обичайният резултат $2\pi/\omega$, валиден за линеаризираното уравнение $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta$. Когато $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, периода е логаритмично разходящ. Фазовият портрет на махалото е даден на фигура 2. За малки осцилации, трептенето на махалото е същото като хармоничния осцилатор. Това е нещо очаквано, за малки ъгли $\sin \theta \approx \theta$ и уравненията за движение на махалото и на хармоничния осцилатор са еднакви. Тези осцилации се наричат **либрации**. В общи линии либрациите са "поклащания" в реалното пространство - траекториите им във фазовото пространство топологично могат да бъдат свити до точка (не се притеснявайте какво точно означава това). Ако обаче началната ъглова скорост е достатъчно голяма наблюдаваме качествено различно движение - фазовите криви са **ротации**. В този случай махалото е засилено до такава степен (тоест, има достатъчно енергия), за да се завърти и постоянно се движи в една и съща посока. Фазовата крива която разделя тези топологично различни движения е точно сепаратрисата.

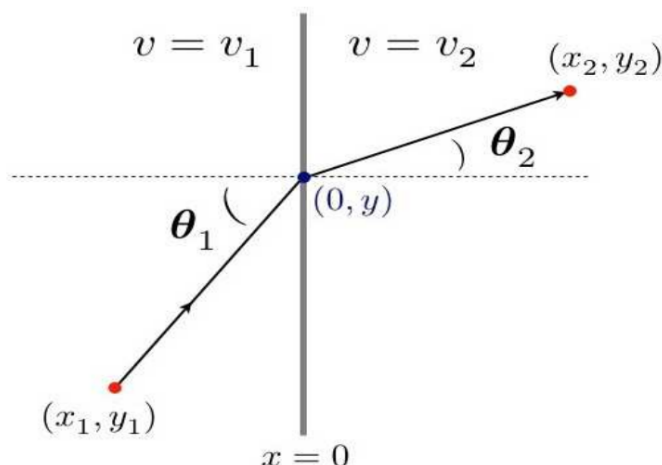
Вариационно смятане

Иво Илиев

1 Закон на Снелиус

Задача 1 (Задача за замявка) : Представете си че стоите в точката (x_1, y_1) на плажа и искате да стигнете до точката (x_2, y_2) на няколко метра навътре в морето. По кой път трябва да минете за да стигнете на желаното място за най-кратко време? Нека скоростта ви на пясъка е v_1 и скоростта във водата ви е v_2 , $v_2 < v_1$. Нека също разделението между водата и пясъка да е правата $x = 0$.

Решение: Веднага можем да съобразим, че оптималната траектория няма да е права линия а сигурно ще е крива, съставена от два сегмента които са прави линии. Тоест, имаме движение по права линия по пясъка и движение по права линия във водата, но тези две отсечки сключват някакъв ъгъл.



Нека нашия път да пресича границата между пясъка и водата в точката $(0, y)$. Тогава времето за придвижване ще е функция от y :

$$T(y) = \frac{1}{v_1} \sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y)^2} \quad (1.1)$$

За да намерим минималното време търсим екстремум на тази функция:

$$\frac{dT}{dy} = 0 = \frac{1}{v_1} \left(\frac{y - y_1}{\sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2}} \right) - \frac{1}{v_2} \left(\frac{y_2 - y}{\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y)^2}} \right)$$

$$= \frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} \quad (1.2)$$

Тоест, оптималния път е този който удовлетворява:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}, \quad (1.3)$$

резултат който вие със сигурност знаете като *закон на Снелиус*. Закона на Снелиус е познат от оптиката - скоростта на светлината в поларизируема среда се записва като $v = c/n$, където n е индекса на рефракция. В термини на n имаме:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (1.4)$$

Ако имаме няколко граници между среди (още се нарича интерфейси), закона на Снелиус пак е валиден за всеки две. Например той ще има вида

$$n_i \sin \theta_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}, \quad (1.5)$$

на интерфейса между среди i и $i+1$. Интересно е да видим какво се случва в граничния преход когато средите са безкрайно много, но и тяхната дебелина е безкрайно малка. В този случай можем да разглеждаме n и θ като функции на непрекъсната променлива x . Тогава имаме

$$\frac{\sin \theta(x)}{v(x)} = \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}} = P, \quad (1.6)$$

където P е константа. Тук сме заместили $\sin \theta = y'/\sqrt{1+y'^2}$, което се получава ако нарисуваме правоъгълен триъгълник със страни dx , dy , $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Диференцирайки по x получаваме:

$$\frac{1}{1+y'^2} \frac{y''}{y'} = \frac{v'}{v}. \quad (1.7)$$

Това е диференциално уравнение, което $y(x)$ трябва да изпълнява ако искаме *функционалът*

$$T[y(x)] = \int \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x)} \quad (1.8)$$

да е минимизиран.

2 Функции и функционали

Функцията е математически обект, който взема реална или комплексна променлива, или набор от такива променливи, и връща реално или комплексно число. Функционалът е математически обект който взема функция и връща число. В нашият случай:

$$T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx L(y, y', x), \quad (2.1)$$

където функцията $L(y, y', x)$ се дава от:

$$L(y, y', x) = \frac{1}{v(x)} \sqrt{1+y'^2}. \quad (2.2)$$

Тези дефиниции са леко неформални, но са предостатъчни за нашето работно ниво. По-строга дефиниция за (линеен) функционал ще изучаваме в курса по функционален анализ.

В анализа на функции, ние намираме екстремума на функция $f(x)$ като изискваме $f(x)$ да не се променя когато направим смяната $x \rightarrow x + dx$:

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)(dx)^2 + \dots \quad (2.3)$$

Казваме че $x = x^*$ е екстремум когато $f'(x^*) = 0$. Когато говорим за функционали, първата *функционална вариация* се получава като изпратим $y(x) \rightarrow y(x) + \delta y(x)$, и извлечем вариация във функционала до ред δy . Нека направим сметката:

$$\begin{aligned} T[y(x) + \delta y(x)] &= \int_{x_1}^{x_2} dx L(y + \delta y, y' + \delta y', x) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ L + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \mathcal{O}((\delta y)^2) \right\} \\ &= T[y(x)] + \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right\} \\ &= T[y(x)] + \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нещо много важно за вариацията $\delta y(x)$ е че тя трябва да е нула на границата: $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$. Това е така защото пространството от функции които разглеждаме удовлетворяват гранични условия при които краищата са фиксирани: $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$. Тоест, последният член в извеждането (2.4) се занулява. Имаме:

$$\delta T = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \delta y \quad (2.5)$$

Казваме, че първата *функционална производна* на по $y(x)$ е

$$\frac{\delta T}{\delta y(x)} = \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \quad (2.6)$$

Функционалът $T[y(x)]$ е в екстремум когато първата му функционална производна е 0, което води до следното диференциално уравнение за $y(x)$:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Това е известно като уравнение на **Уравнение на Лагранж-Ойлер**.

2.1 $L(y, y', x)$ не зависи от y

Нека $L(y, y', x)$ не зависи от y . Тогава от уравнението на Лагранж-Ойлер следва че:

$$P \equiv \frac{\partial L}{\partial y'} \quad (2.8)$$

е константа. В класическата механика се оказва, че това е *обобщения импулс*. Ако се върнем на примера със закона на Снелиус, $L = \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2}$ (което очевидно не зависи от y) имаме,

$$P = \frac{y'}{v\sqrt{1 + y'^2}} \quad (2.9)$$

2.2 $L(y, y', x)$ не зависи от x

Когато $L(y, y', x)$ зависи от x , отново можем да интегрираме уравненията за движение. Нека разгледаме величината:

$$H = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L \quad (2.10)$$

За нея е вярно че

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L \right] = y'' \frac{\partial L}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y'} y'' - \frac{\partial L}{\partial y} y' - \frac{\partial L}{\partial x} \\ &= y' \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} \right] - \frac{\partial L}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

където сме използвали уравненията на Лагранж-Ойлер за да запишем $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = \frac{\partial L}{\partial y}$. Но по условие в тази подточка $\partial L / \partial x = 0 \Rightarrow dH / dx = 0$, следователно H е константа. Тази константа е важна - в механичните системи тя ще отговаря на пълната механична енергия.

3 Примери

Нека сега решим няколко примера от математика и физиката използвайки апарата на вариационното смятане:

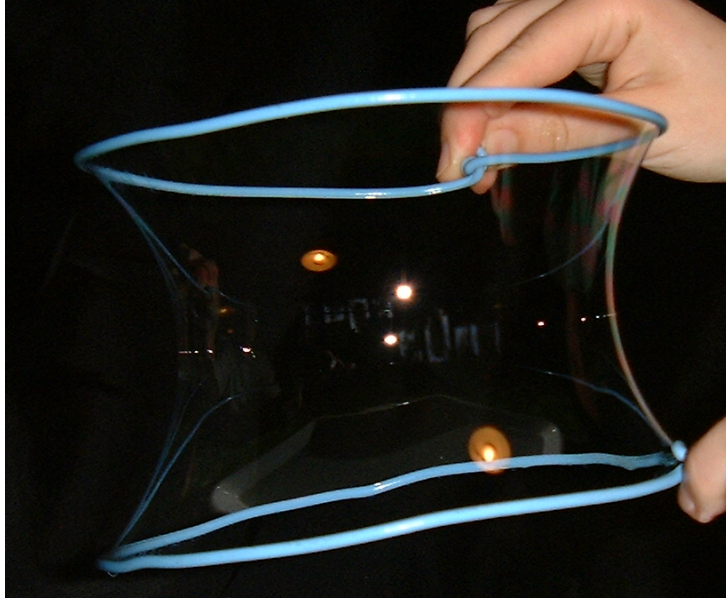
Задача 2 (Минимална повърхнина на ротационно тяло) *Изразете площта на ротационно тяло като функционал от пораждащата го крива. Екстремизирайте този функционал.*

Решение: Нека ротационното ни тяло се поражда от функцията $y(x)$ завъртяна около оста x . От курса по математически анализ знаем че площта на тази фигура се дава от интеграла:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} dx 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (3.1)$$

Както виждаме, A е функционал от пораждащата функция - $A = A[y(x)]$, където $L(y, y') = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}$. Очевидно, L не зависи от x , следователно (както изведохме вариационно в миналата подточка)

$$H = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L \Rightarrow \frac{dH}{dx} = -\frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$



Фигура 1: Разпъването на сапунен филм между два успоредни ринга води до получаване на същата минимална ротационна повърхнина.

Нека намерим експлицитният вид на H :

$$H = 2\pi y \cdot \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - 2\pi y \sqrt{1+y'^2} = -\frac{2\pi y}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (3.3)$$

Решавайки за y' :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{2\pi y}{H}\right)^2 - 1}. \quad (3.4)$$

Това е известно диференциално уравнение, решава се посредством субституцията $y = \frac{H}{2\pi} \cosh u$. От тук $dy = \frac{H}{2\pi} \sinh u du$ и:

$$\frac{H}{2\pi} \sinh u \frac{du}{dx} = \pm \sqrt{(\cosh u)^2 - 1} \quad (3.5)$$

Дясната страна обаче е просто $\sinh u$, така че след съкращаване и полагане на $b = H/2$ имаме:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{b} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{b}x + C, \quad (3.6)$$

въръщайки се в полагането получаваме:

$$y(x) = b \cosh\left(\frac{x-a}{b}\right), \quad (3.7)$$

където a и b се явяват неопределени интеграционна константа. На английски тази форма се нарича *catenary*. По-нататък ще видим че тази крива е и формата която равномерно плътно въже приема когато е закачено на две точки под силата на гравитацията (отбележете че не е парабола!). За да фиксираме константите a и b можем да наложим граничните условия $y(x_1) = y_1$ и $y(x_2) = y_2$.

Нека разгледаме случая, когато $-x_1 = x_2 \equiv x_0$ и $y_1 = y_2 \equiv y_0$. Ясно е тогава че $a = 0$ и имаме:

$$y_0 = b \cosh\left(\frac{x_0}{b}\right) \Rightarrow \gamma = \kappa^{-1} \cosh \kappa, \quad (3.8)$$

където $\gamma \equiv y_0/x_0$ и $\kappa \equiv x_0/b$. Може да се покаже че за $\gamma > 1.5089$ съществуват две решения, едно от които е глобален минимум а другото е локален минимум или седлова точка за $A[y(x)]$. Решението с по-малката стойност за κ ни дава по-малка стойност за A . Забележете че

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\cosh(x/b)}{\cosh(x_0/b)}, \quad (3.9)$$

следователно $y(x=0) = y_0(x_0/b)$.

Спомняме си, че когато търсим екстремуми на функции дефинирани върху краен или полу-безкраен интервал трябва да пресметнем функцията и на границата, тъй като има възможност да имаме глобален екстремум на границата дори производната там да не е нула. По същият начин, когато търсим екстремуми на функционали, трябва да изследваме функциите на границата на пространството от функции. В нашият случай, такава функция би била прекъснатото решение:

$$y(x) = \begin{cases} y_1 & \text{if } x = x_1 \\ 0 & \text{if } x_1 < x < x_2 \\ y_2 & \text{if } x = x_2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Това решение е сравнително сложно - представлява повърхност, която е съставена от два диска с радиуси y_1 и y_2 , свързани с безкрайно тънка нишка. Функционала на площта изчислен за това $y(x)$ е очевидно $A = \pi(y_1^2 + y_2^2)$. За $\gamma > \gamma_c \approx 1.564$, една от катенарните криви е глобалния минимум. За $\gamma < \gamma_c$, минималната повърхнина се постига от неедносвързаното решение.

Може да се отбележи че функционалната производна:

$$\frac{\delta A}{\delta y(x)} = \frac{2\pi(1 + y'^2 - yy'')^{3/2}}{1 + y'^2}, \quad (3.11)$$

наистина е нула за хиперболичното решение, но не е нула за прекъснатото решение, където има стойност 2π в интервала $(-x_0, x_0)$. Тъй като $y = 0$ в този интервал, y не може да намалява. Фактът, че имаме положителна производна означава че увеличаване на y ще доведе до овеличаване и на площта A , тоест наистина стойността на A на границата, която е $2\pi y_0^2$ е локален минимум.

Ако се изследват още малко изразите можем да видим че за $\gamma < y_* \approx 1.5089$, локалният минимум и седловата точка спират да съществуват. Това е известен феномен, наречен бифуркация на седлова точка (saddle-node bifurcation) за който, ако ви е интересно може да прочетете в интернет. Тоест, за $\gamma \in [0, y_*)$ не съществуват екстремуми за $A[y(x)]$ и минималната площ се достига за прекъснатото $y(x)$ лежащо на границата на пространството от функции. За $\gamma \in (\gamma_*, \gamma_c)$, съществуват два екстремума, един от които е локален минимум, а другия е седлова точка. Площта отново се минимизира от прекъснатото решение. За $\gamma \in (\gamma_c, \infty)$, локалният минимум е глобалният минимум и има по-малка площ от тази на прекъснатото решение.

Класическа механика - Лагранжев формализъм

Иво Илиев

1 Обобщени координати

Както сте дискутирали на лекции, набор *обобщени координати* q_1, \dots, q_n напълно описва позициите на всички частици в една механична система. В система с d_f степени на свобода и k връзки (constraints), са нужни $n = d_f - k$ на брой независими обобщени координати за да опишем всички позиции. Връзката е някакво взаимоотношение между координатите, например $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ за частица движещата се върху сфера с радиус a . В този случай, $d_f = 3, k = 1$ и ние можем да елиминираме z , записвайки го посредством другите координати $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, или можем да изберем като координати полярния ъгъл θ и азимуталния ъгъл ϕ .

Обобщените координати могат да имат размерност на дължина, ъгъл или нещо съвсем различно. Например в теорията на малките осцилации, по конвенция координатите имат размерност $[\text{kg}]^{1/2} \times [\text{m}]$.

2 Принцип на Хамилтон

Уравненията за движение (equations of motion, EoM) в класическата механика са закодирани във вариационния принцип, наречен принцип на Хамилтон. Той гласи че динамиката на една механична система е такава че функционала на *действието*

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt l(q, \dot{q}, t) \quad (2.1)$$

е в екстремум, тоест $\delta S = 0$. Тук $q = \{q_1, \dots, q_n\}$ са набор от обобщени координати и

$$L = T - U \quad (2.2)$$

е *Лагранжианът*, където T е кинетичната енергия а U е потенциалната енергия. Поставяйки $\delta S = 0$ получаваме уравненията на Лагранж-Ойлер:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right)}_{p_\sigma} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}}_{F_\sigma}. \quad (2.3)$$

Виждаме че този имаме еквивалентност с вторият закон на Нютон $\dot{p}_\sigma = F_\sigma$. Тъй като $\{q_\sigma\}$ са обобщени координати, p_σ може да няма размерност на импулс, както и F_σ да няма размерност на сила. Например, ако обобщената координата е ъгъл ϕ , то

съответстващия обобщен импулс ще е моментът на импулса относно оста на въртене а обобщената сила ще е въртящия момент.

Задача 1 (Инвариантност на уравненията за движение)

Нека имаме лагранжиан L и си представим че от него сме конструирали нов такъв:

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}G(q, t). \quad (2.4)$$

където G е някаква произволна функция на координатите и на времето. Тогава новото действие ще е:

$$\tilde{S}[q(t)] = S[q(t)] + G(q_b, t_b) - G(q_a, t_a). \quad (2.5)$$

Ако разгледаме разликата $\tilde{S} - S = G(q_b, t_b) - G(q_a, t_a)$, виждаме че тя е функция само стойностите на границата - $\{q_a, q_b\}$ следователно $\delta(\tilde{S} - S) = 0 \Rightarrow \delta\tilde{S} = \delta S$. Това означава че L и \tilde{L} водят до едни и същи уравнения за движение. Тоест, уравненията на движение остават инвариантни при добавяне на пълен диференциал по времето на произволна функция на координатите и времето в лагранжиана.

3 Рецепта за решаване на механични задачи

1. Избираме си набор обобщени координати $\{q_1, \dots, q_n\}$
2. Намираме кинетичната енергия $T(q, \dot{q}, t)$, потенциалната енергия $U(q, t)$ и лагранжиана $L(q, \dot{q}, t) = T - U$. Често е удобно да запишем кинетичната енергия за всяка частица първо в декартови координати преди да преминем в избраните обобщени.
3. Намираме каноничния импулс $p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$ и обобщената сила $F_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}$.
4. Изчисляваме производните по времето \dot{p}_σ и записваме уравненията за движение $\dot{p}_\sigma = F_\sigma$. Трябва да сме внимателни при диференциране, помним верижното правило и правилото на Лайбниц.
5. Идентифицираме запазващи се величини (ако има такива).

Задача 2 (Центростремителна сила в две измерения) *Разгледайте задачата за частица с маса m движеща се в две измерения под действието на потенциал $U(\rho)$, който е функция на разстоянието до началото на координатната система $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Решение: Очевидно ще е полезно да преминем в полярни координати:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \Rightarrow \dot{x} = \cos \phi \dot{\rho} - \rho \sin \phi \dot{\phi}, \\ y &= \rho \sin \phi \Rightarrow \dot{y} = \sin \phi \dot{\rho} + \rho \cos \phi \dot{\phi}, \end{aligned}$$

Кинетичната енергия тогава ще е:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2). \quad (3.1)$$

Лагранжианът е разликата кинетична минус потенциална енергия:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) - U(\rho). \quad (3.2)$$

Сега трябва да намерим уравненията за движение. Нека първо разгледаме уравнението за движение по ρ . Имаме:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\rho \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\ddot{\rho} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - U'(\rho) \quad (3.4)$$

$$\text{Euler-Lagrange} \Rightarrow m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - U'(\rho) \quad (3.5)$$

И сега за ϕ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{Euler-Lagrange} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow m\rho^2\dot{\phi} = p_\phi = \text{const.} \quad (3.8)$$

Можем да използваме тази релация за да елиминираме $\dot{\phi}$, получавайки

$$m\ddot{\phi} = \frac{m\rho p_\phi^2}{m^2\rho^4} - U'(\rho) \Rightarrow m\rho^2 = \frac{p_\phi^2}{m\rho^3} - U'(\rho). \quad (3.9)$$

Можем да намерим и пълната енергия:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + U(\rho) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + U(\rho). \quad (3.10)$$

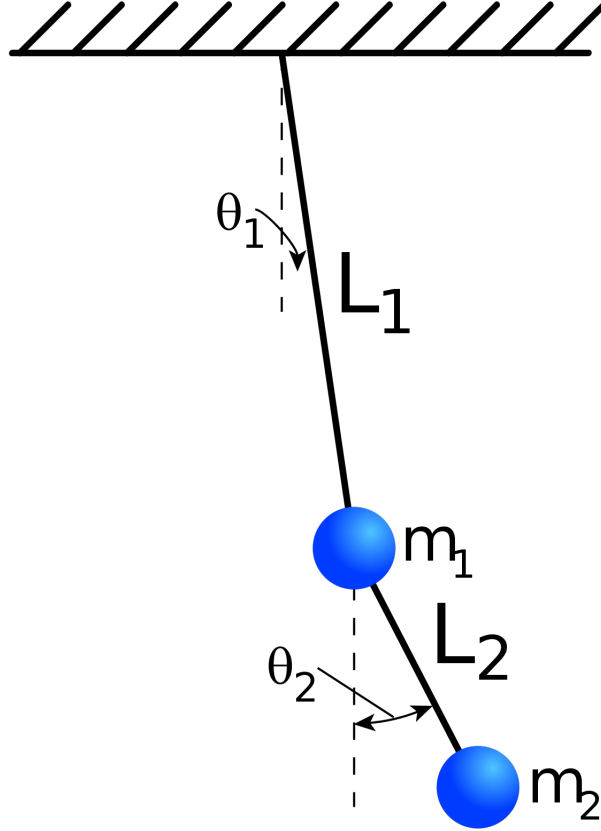
Лесно може да се покаже че p_ϕ е константа по времето използвайки уравненията на Лагранж-Ойлер.

Задача 3 (Двойно махало) Разгледайте системата "двойно махало" дадена на фигура (1). Намерете уравненията за движение като използвате за обобщени координати двата ъгъла θ_1 и θ_2 . Анализирайте системата за малки осцилации.

Решение: Нека първо да намерим изразите за кинетичната и потенциалната енергия. В декартови координати имаме:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3.11)$$

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2. \quad (3.12)$$



Фигура 1: Двойно махало, https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum#/media/File:Double-Pendulum.svg, by JabberWok, licensed under Creative Commons 3.0 Attribution-ShareAlike

Сега ще трябва с малко тригонометрия да запишем декартовите координати в термини на обобщените координати $\{\theta_1, \theta_2\}$.

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (3.13)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \quad y_2 = -l_2 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \quad (3.14)$$

Изразяваме и скоростите

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \quad \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (3.15)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (3.16)$$

Следователно след малко трансформации:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right\} \quad (3.17)$$

$$U = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2, \quad (3.18)$$

и за лагранжиана получаваме

$$L = T - U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2. \quad (3.19)$$

Нека сметнем също и:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2, p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \quad (3.20)$$

Пресмятаме и производните (моля да повторите сметката, има шанс да съм сбъркал знак :D)

$$\dot{p}_1 = (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \quad (3.21)$$

$$= -(m_1 + m_2)g l_1 \sin \theta_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad (3.22)$$

$$\dot{p}_2 = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \quad (3.23)$$

$$= -m_2 g l_2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}. \quad (3.24)$$

Тоест, достигаем до следните уравнения за движение:

$$l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + g \sin \theta_1 = 0 \quad (3.25)$$

$$l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + g \sin \theta_2 = 0. \quad (3.26)$$

Получихме система от две зацепени нелинейни обикновени диференциални уравнения от втори ред. В общия случай тази система няма аналитично решение и се налага да я решаваме числено. Още повече, това е пример за хаотична система. [Тук](#) може да си поиграете с числена симулация и визуализация на двойно махало.

Разбира се, нашата задача може да се опрости ако предположим че системата е близо до равновесие. В този случай, амплитудите са малки и можем да развием в ред по степените на θ_1 и θ_2 . За домашно, наложете условието за малки ъгли в оригиналния лагранжиан (3.19) и покажете че от него следват следните уравнения:

$$l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \ddot{\theta}_2 + g \theta_1 = 0 \quad (3.27)$$

$$l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 + g \theta_2 = 0. \quad (3.28)$$

Нека дефинираме

$$\alpha \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \beta \equiv \frac{l_2}{l_1}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l_1}, \quad (3.29)$$

ще получим следната система от зацепени уравнения:

$$\ddot{\theta}_1 + \alpha \beta \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 \theta_1 = 0 \quad (3.30)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \beta \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 \theta_2 = 0 \quad (3.31)$$

Тази система може да бъде решена посредством един интересен трик. Нека вземем линейна комбинация от първото уравнение плюс някаква константа, κ , по второто:

$$(1 + \kappa) \ddot{\theta}_1 + (\alpha + \kappa) \beta \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 (\theta_1 + \kappa \theta_2) = 0. \quad (3.32)$$

Нека сега изискаме отношението на коефициентите пред θ_2 и θ_1 да бъде същото като на коефициентите пред $\ddot{\theta}_2$ и $\ddot{\theta}_1$:

$$\frac{(\alpha + \kappa)\beta}{1 + \kappa} = \kappa \Rightarrow \kappa_{\pm} = \frac{1}{2}(\beta - 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \beta)^2 + 4\alpha\beta}. \quad (3.33)$$

Сега сме избрали $\kappa = \kappa_{\pm}$. Тогава уравнението за движение може да бъде записано като

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 + \kappa_{\pm}\theta_2) = -\frac{\omega_0^2}{1 + \kappa_{\pm}}(\theta_1 + \kappa_{\pm}\theta_2) \quad (3.34)$$

Дефинирайки *нормални моди*

$$\xi_{\pm} \equiv (\theta_1 + \kappa_{\pm}\theta_2) \quad (3.35)$$

получаваме

$$\ddot{\xi}_{\pm} + \omega_{\pm}^2 \xi_{\pm} = 0, \quad (3.36)$$

където

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \kappa_{\pm}}} \quad (3.37)$$

Тоест, преминавайки към тези "нормални" координати ξ ние получаваме две несплетени уравнения за движение (3.36), които са просто уравнения на хармоничен осцилатор с честота ω_{\pm} .

Класическа механика - Лагранжев формализъм, Втора Част

Иво Илиев

1 Още Задачи

Задача 1 (Вириална теорема (Клаузиус, 1870))

Вириалната теорема ни дава информация за осредненото по време движение на една механична система. Дефинираме *вириал*:

$$G(q, p) = \sum_{\sigma} p_{\sigma} q_{\sigma}. \quad (1.1)$$

Тогава

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_{\sigma} (\dot{p}_{\sigma} q_{\sigma} + p_{\sigma} \dot{q}_{\sigma}) \\ &= \sum_{\sigma} q_{\sigma} F_{\sigma} + \sum_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нека предположим че $T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} T_{\sigma\sigma'} \dot{q}_{\sigma} \dot{q}_{\sigma'}$ е хомогенна функция от ред $k = 2$ по \dot{q} и че U е хомогенна функция от нулев ред по \dot{q}_{σ} . Тогава:

$$\sum_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} = \sum_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\sigma}} = 2T, \quad (1.3)$$

което следва от теоремата на Ойлер за хомогенни функции която гласи че за хомогенна функция $f(x_i)$ от ред n е изпълнено:

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(\mathbf{x}) \quad (\text{Euler's Theorem for Homogeneous Functions}) \quad (1.4)$$

Сега разглеждаме средното по време на \dot{G} за период τ :

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \frac{dG}{dt} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)]. \quad (1.5)$$

Ако $G(t)$ е ограничена, тогава границата при $\tau \rightarrow \infty$ трябва да имаме $\langle \dot{G} \rangle = 0$. Всяко ограничено движение (например като движението на Земята около Слънцето) води до $\langle \dot{G} \rangle_{\tau \rightarrow \infty} = 0$. Но тогава от (1.2) следва

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = 2\langle T \rangle + \left\langle \sum_{\sigma} q_{\sigma} F_{\sigma} \right\rangle = 0 \quad (1.6)$$

От което следва:

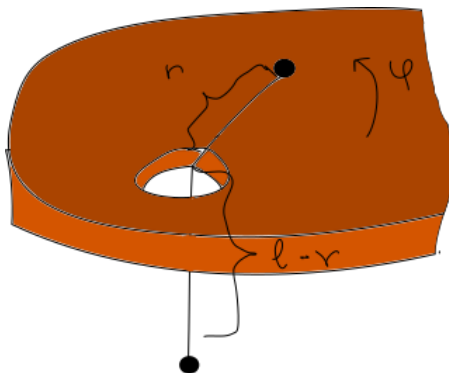
$$\begin{aligned}\langle T \rangle &= -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\sigma} q_{\sigma} F_{\sigma} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\sigma} q_{\sigma} \frac{\partial U}{\partial q_{\sigma}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_i r_i \cdot \nabla_i U(r_1, \dots, r_N) \right\rangle = \frac{1}{2} k \langle U \rangle,\end{aligned}\quad (1.7)$$

където на последния ред отново сме използвали теоремата на Ойлер за хомогенни функции. Финално, тъй като пълната механична енергия, $T + U = E$ се запазва, то

$$\langle T \rangle = \frac{kE}{k+2}, \quad \langle U \rangle = \frac{2E}{k+2}.\quad (1.8)$$

Задача 2 *Нерастеглива безмасова нишка с дължина l преминава през дупка в хоризонтална повърхност. Материална точка с маса m е закачена на единия край на нишката и се движи по масата а втора материална точка с маса m виси закачена на другия край. Предполагайки че в системата няма никакво триене,*

- (а) *запишете лагранжиана за системата.*
- (б) *намерете условията при които висящата материална точка би останала стационарна*
- (в) *започвайки от конфигурацията в точка б) предположете че висящата материална точка е издърпана леко надолу и след това освободена. Коя величина се запазва при този процес?*
- (г) *намерете последвалото движение за висящата материална точка.*



Фигура 1: Илюстрация на задача 2. Не мога да рисувам ама хич

Решение:

- (а) Нека първо намерим израз за кинетичната енергия. Кинетичната енергия е сбор от кинетичните енергии на двете тела. Нека първо разгледаме висящото:

$$T_1 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (-(\dot{l} - \dot{r})^2) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (1.9)$$

Нека запишем и кинетичната енергия на тялото върху повърхността, преминавайки в полярни координати r, ϕ :

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \quad (1.10)$$

Потенциалната енергия е нищо повече от гравитационния потенциал

$$U = mg(r - l). \quad (1.11)$$

Вече можем да напишем лагранжиана

$$L = T - U = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - mgr - \cancel{mgl}, \quad (1.12)$$

където сме задраскали последния член защото той е константа и няма да има принос към уравненията за движение.

(б) Нека сега разпишем уравненията на Лагранж-Ойлер:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} (2m\dot{r}) = 2m\ddot{r} \quad (1.13)$$

$$= mr\dot{\phi}^2 - mg = \frac{\partial L}{\partial r} \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow 2\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + g = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\phi}) = 2mr^2\ddot{\phi} \quad (1.16)$$

$$= 0 = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad (1.17)$$

$$\Rightarrow mr^2\dot{\phi} = \text{const} = p_\phi. \quad (1.18)$$

Тоест, показахме че ъгловата скорост е запазваща се величина.

Замествайки (1.18) в (1.15) получаваме

$$\ddot{r} = \frac{p_\phi^2}{2m^2r^3} - \frac{g}{2}. \quad (1.19)$$

Ако искаме висящото топче да е стационарно, то задължително $\ddot{r} = 0$, тоест $r = r_0$. По-точно:

$$\ddot{r} = 0 = \frac{p_\phi^2}{2m^2r_0^3} - \frac{g}{2} \Rightarrow r_0^3 = \frac{p_\phi^2}{m^2g} \quad (1.20)$$

замествайки p_ϕ имаме:

$$r_0^3 = r_0^4 \frac{\dot{\phi}^2}{g} \Rightarrow \dot{\phi}^2 r_0 = g \quad (1.21)$$

Тоест, когато $\dot{\phi}^2 = g/r_0$ гравитационното ускорение се уравновесява от центросремителното.

- (в) Предположете че дръпнем/бутнем второто тяло леко по вертикалното направление. Очевидно това не променя въртящия момент на системата, следователно p_ϕ продължава да е запазваща се величина. Можем да напишем това леко изменение по следния начин:

$$r = r_0 + \delta r \quad (1.22)$$

За домашно заместете (1.22) в изразът за лагранжиана (1.12) след което намерете новите линеаризирани уравнения за движение посредством уравненията на Лагранж-Ойлер. Използвайки че $(\delta r)^2 = 0$ трябва да получите:

$$\ddot{\delta r} = \underbrace{-\frac{g}{2} + \frac{p_\phi^2}{2m^2 r_0^3}}_{=0} - \frac{2p_\phi^2}{m^2 r_0^4} \delta r + O(\delta r^2) \quad (1.23)$$

$$\ddot{\delta r} + \frac{2p_\phi^2}{m^2 r_0^4} \delta r = 0. \quad (1.24)$$

Това е уравнение на хармоничен осцилатор с честота $\omega = \frac{\sqrt{2}p_\phi}{mr_0^2}$. Тогава:

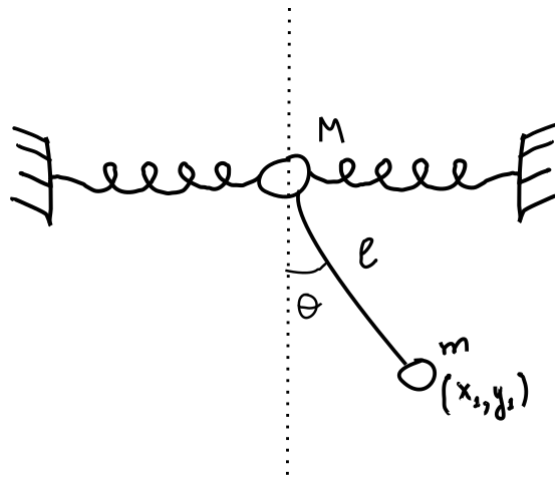
$$\delta r(t) = A \cos(\omega t + \theta), \quad (1.25)$$

където A и θ са константи, които можем да определим за конкретни начални условия. Тоест, получихме че малка пертурбация във вертикалното направление на висящата точка води до просто трептене, което можеше и да се очаква.

Класическа механика - Лагранжев формализъм, Втора Част

Иво Илиев

1 Още Задачи



Задача 1 Нека разгледаме махало с маса m , но нека също предположим, че точката му на окачване също е тяло с маса M , което може да се движи в хоризонталното направление. Това тяло е закачено за пружинки с константа k от всяка страна, носещи резултантна въртяща сила $-2kx$ върху точката на окачване.

(а) Използвайте обобщените координати x (отклонението от равновесното положение на тялото с маса M) и θ (ъгълът на отместване на махалото спрямо вертикала) за да запишете лагранжиана на системата.

(б) Решете задачата за малки осцилации.

Решение: Първата стъпка е да преинем от декартовите координати описващи махалото в дадените обобщени координати. От чертежа виждаме че:

$$x_1 = x + l \sin \theta \quad y_1 = -l \cos \theta. \quad (1.1)$$

От тук следва че

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta} \quad \dot{y}_1 = l \sin \theta \dot{\theta} \quad (1.2)$$

Сега можем да запишем кинетичната енергия:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}. \quad (1.3)$$

Ако връщата сила е $F = -2kx$, то тогава потенциалната енергия на пружините ще е kx^2 . Добавяйки гравитационната потенциална енергия, получаваме:

$$U = kx^2 - mgl \cos \theta, \quad (1.4)$$

или за лагранжиана:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \dot{x}\dot{\theta} + mgl \cos \theta - kx^2 \quad (1.5)$$

Уравненията на Лагранж-Ойлер са:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ &= -2kx = \frac{\partial L}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2\ddot{\theta} + ml \cos \theta \ddot{x} - \cancel{ml \sin \theta \dot{x}\dot{\theta}} \\ &= \cancel{-ml \sin \theta \dot{x}\dot{\theta}} - mgl \sin \theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Опростявайки малко тези изрази, получаваме уравненията за движение:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \ddot{x} + \frac{m}{M}l \cos \theta \ddot{\theta} - \frac{m}{M}l \sin \theta \dot{\theta}^2 &= -\frac{2k}{M}x \\ l\ddot{\theta} + \cos \theta \ddot{x} &= -g \sin \theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

Нека преминем към малки осцилации - това ще рече че отместванията x и θ са близки до нулата, $(x, \theta) \approx 0$. Имаме следните линеаризирани уравнения:

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right) \ddot{x} + \frac{m}{M}l\ddot{\theta} + \frac{2k}{M}x = 0 \quad (1.9)$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0. \quad (1.10)$$

Нека налучкаме едно решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \quad (1.11)$$

Замествайки в (1.10) получаваме:

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{M} - (1 + \frac{m}{M})\omega^2 & -\frac{m}{M}l\omega^2 \\ -\omega^2 & g - l\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.12)$$

За да имаме нетривиално решение трябва детерминантата да е нула

$$\left(\frac{2k}{M} - (1 + \frac{m}{M})\omega^2\right) (g - l\omega^2) - \frac{m}{M}l\omega^4 = 0 \quad (1.13)$$

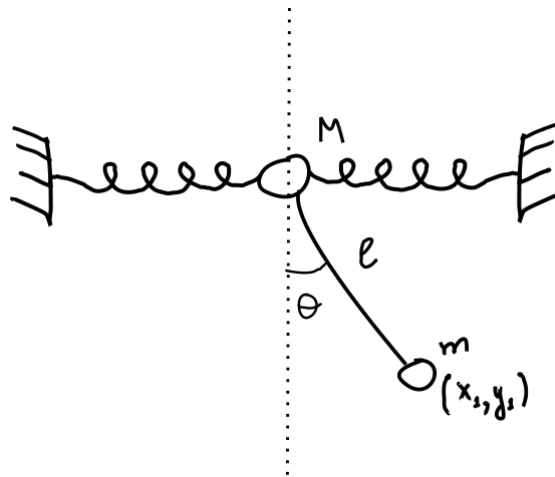
$$\Rightarrow l\omega^4 - \left(\left(1 + \frac{m}{M}\right)g + \frac{2k}{M}l\right)\omega^2 + \frac{2k}{M}g = 0 \quad (1.14)$$

Това е биквадратно уравнение за ω , чиито решения лесно могат да бъдат намерени.

Класическа механика - Лагранжев формализъм, Трета (и половина) Част

Иво Илиев

1 Още Задачи



Задача 1 Нека разгледаме махало с маса m , но нека също предположим, че точката му на окачване също е тяло с маса M , което може да се движи в хоризонталното направление. Това тяло е закачено за пружинки с константа k от всяка страна, носещи резултантна връщаща сила $-2kx$ върху точката на окачване.

(а) Използвайте обобщените координати x (отклонението от равновесното положение на тялото с маса M) и θ (вгълът на отместване на махалото спрямо вертикала) за да запишете лагранжиана на системата.

(б) Решете задачата за малки осцилации.

Решение: Първата стъпка е да преинем от декартовите координати описващи махалото в дадените обобщени координати. От чертежа виждаме че:

$$x_1 = x + l \sin \theta \quad y_1 = -l \cos \theta. \quad (1.1)$$

От тук следва че

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta} \quad \dot{y}_1 = l \sin \theta \dot{\theta} \quad (1.2)$$

Сега можем да запишем кинетичната енергия:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}. \quad (1.3)$$

Ако връщата сила е $F = -2kx$, то тогава потенциалната енергия на пружините ще е kx^2 . Добавяйки гравитационната потенциална енергия, получаваме:

$$U = kx^2 - mgl \cos \theta, \quad (1.4)$$

или за лагранжиана:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \dot{x}\dot{\theta} + mgl \cos \theta - kx^2 \quad (1.5)$$

Уравненията на Лагранж-Ойлер са:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ &= -2kx = \frac{\partial L}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2\ddot{\theta} + ml \cos \theta \ddot{x} - \cancel{ml \sin \theta \dot{x}\dot{\theta}} \\ &= \cancel{-ml \sin \theta \dot{x}\dot{\theta}} - mgl \sin \theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Опростявайки малко тези изрази, получаваме уравненията за движение:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \ddot{x} + \frac{m}{M}l \cos \theta \ddot{\theta} - \frac{m}{M}l \sin \theta \dot{\theta}^2 &= -\frac{2k}{M}x \\ l\ddot{\theta} + \cos \theta \ddot{x} &= -g \sin \theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

Нека преминем към малки осцилации - това ще рече че отместванията x и θ са близки до нулата, $(x, \theta) \approx 0$. Имаме следните линеаризирани уравнения:

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right) \ddot{x} + \frac{m}{M}l\ddot{\theta} + \frac{2k}{M}x = 0 \quad (1.9)$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0. \quad (1.10)$$

Нека налучкаме едно решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \quad (1.11)$$

Замествайки в (1.10) получаваме:

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{M} - (1 + \frac{m}{M})\omega^2 & -\frac{m}{M}l\omega^2 \\ -\omega^2 & g - l\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.12)$$

За да имаме нетривиално решение трябва детерминантата да е нула

$$\left(\frac{2k}{M} - (1 + \frac{m}{M})\omega^2\right) (g - l\omega^2) - \frac{m}{M}l\omega^4 = 0 \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow l\omega^4 - \left(\left(1 + \frac{m}{M}\right)g + \frac{2k}{M}l\right)\omega^2 + \frac{2k}{M}g = 0 \quad (1.14)$$

Това е биквадратно уравнение за ω , чиито решения лесно могат да бъдат намерени.

2 Теорема на Ньотер и Хамилтониан

Вече сте дискутирали теоремата на Ньотер на лекции. Най-просто казано, тя твърди че ако съществува някаква непрекъсната трансформация която запазва лагранжианта инвариантен, то на нея отговаря закон за запазване. Някой от вас обаче могат да си зададат въпроса - не е ли тази дефиниция твърде рестриктивна, не трябва ли да настояваме не за инвариантност на лагранжиана L , а на действието S ¹? Нека разгледаме този въпрос.

Предполагаме че S е инвариантно под:

$$t \rightarrow \tilde{t}(q, t, \epsilon) \quad q_\sigma \rightarrow \tilde{q}_\sigma(q, t, \epsilon). \quad (2.1)$$

Ако искаме S да е инвариантно, то:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}, t) = \int_{\tilde{t}_a}^{\tilde{t}_b} dt L(q, \dot{q}, \tilde{t}). \quad (2.2)$$

Отбележете че t е просто интеграционна променлива, няма значение дали я пишем t или \tilde{t} . Това което се изменя обаче при трансформацията са крайните точки на интеграла. Нека сега предположим, че трансформацията е инфинитиземална, $\delta t = \tilde{t} - t$, $\delta q = \tilde{q}(\tilde{t}) - q(t)$ са малки. Тогава:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}, t) = \int_{t_a + \delta t_a}^{t_b + \delta t_b} dt \left\{ L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \bar{\delta} q_\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \bar{\delta} \dot{q}_\sigma + \dots \right\}, \quad (2.3)$$

където

$$\begin{aligned} \bar{\delta} q_\sigma &\equiv \tilde{q}_\sigma(t) - q_\sigma(t) \\ &= \tilde{q}_\sigma(\tilde{t}) - \tilde{q}_\sigma(\tilde{t}) + \tilde{q}_\sigma(t) - q_\sigma(t) \\ &= \delta q_\sigma - \dot{q}_\sigma \delta t + \mathcal{O}(\delta q \delta t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Изваждайки (2.3) от (2.2) получаваме:

$$\begin{aligned} 0 &= L_b \delta t_b - L_a \delta t_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \Big|_b \bar{\delta} q_{\sigma,b} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \Big|_a \bar{\delta} q_{\sigma,a} + \int_{t_a + \delta t_a}^{t_b + \delta t_b} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right\} \bar{\delta} q_\sigma(t) \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt} \left\{ \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma \right) \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta q_\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

където $L_{a,b}(q, \dot{q}, t)$ е пресметнато в точката $t = t_{a,b}$. Ако параметъра на трансформацията е инфинитиземален $\epsilon = \delta \epsilon$ и

$$\begin{aligned} \delta t &= A(q, t) \delta \epsilon \\ \delta q_\sigma &= B_\sigma(q, t) \delta \epsilon, \end{aligned} \quad (2.6)$$

то запазващият се заряд е

$$\Lambda = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma \right) A(q, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} B_\sigma(q, t)$$

¹По-скоро да настояваме че S се изменя само с функция на крайните точки.

$$= -H(q, p, t)A(q, t) + p_\sigma B_\sigma(q, t), \quad (2.7)$$

където сме въвели:

$$H = p_\sigma \dot{q}_\sigma - L, \quad (2.8)$$

и сме изразили H като функция на импулсите p_σ , координатите q_σ и времето t . Ако $A = 0$ то получаваме това което очакваме за запазващия се заряд ако бяхме просто предположили инвариантност на L . Забележете че ако искаме H да е запазваща се величина, $\Lambda = H$, то $A = 1, B_\sigma = 0$. Тоест, H ще се запазва ако имаме инвариантност при времеви транскации $t \rightarrow t + \epsilon$. Както вече знаете, тази функция H се нарича *Хамилтониан*.

Задача 2 *Вярно ли е че $H = T + U$?*

Решение: Понякога се прави грешното твърдение, че хамилтониана е просто $H = T + U$ или че хамилтониана е пълната механична енергия на системата. Нека покажем кога това твърдение е вярно и кога не е:

В най-общ вид кинетичната енергия има вида² :

$$\begin{aligned} T &= T_2 + T_1 + T_0 \\ &= \frac{1}{2} T_{\sigma\sigma'}^{(2)}(q, t) \dot{q}_\sigma \dot{q}_{\sigma'} + T_\sigma^{(1)}(q, t) \dot{q}_\sigma + T^{(0)}(q, t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

където $T^{(n)}(q, \dot{q}, t)$ е хомогенна функция от ред n на скоростите. Нека предположим, че потенциалната енергия има вида:

$$U = U_1 + U_0 = U_\sigma^{(1)}(q, t) \dot{q}_\sigma + U^{(0)}(q, t), \quad (2.10)$$

което позволява да имаме сили зависещи от скоростите, каквато например е Лоренцовата сила. Лагранжианът тогава има вида:

$$L = T - U = \frac{1}{2} T_{\sigma\sigma'}^{(2)}(q, t) \dot{q}_\sigma \dot{q}_{\sigma'} + T_\sigma^{(1)}(q, t) \dot{q}_\sigma + T^{(0)}(q, t) - U_\sigma^{(1)}(q, t) \dot{q}_\sigma - U^{(0)}(q, t). \quad (2.11)$$

Каноничният импулс отговарящ на q_σ е

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} = T_{\sigma\sigma'}^{(2)}(q, t) \dot{q}_{\sigma'} + T_\sigma^{(1)}(q, t) - U_\sigma^{(1)}(q, t). \quad (2.12)$$

Обръщайки тази зависимост получаваме

$$\dot{q}_\sigma = T_{\sigma\sigma'}^{(2)-1} \left(p_{\sigma'} - T_{\sigma'}^{(1)} + U_{\sigma'}^{(1)} \right). \quad (2.13)$$

Вече можем да изведем Хамилтониана:

$$\begin{aligned} H &= p_\sigma \dot{q}_\sigma - L \\ &= \frac{1}{2} T_{\sigma\sigma'}^{(2)-1} \left(p_\sigma - T_\sigma^{(1)} + U_\sigma^{(1)} \right) \left(p_{\sigma'} - T_{\sigma'}^{(1)} + U_{\sigma'}^{(1)} \right) - T_0 + U_0 \\ &= T_2 - T_0 + U_0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ако $0, T_1$ и U_1 са нулеви, тоест ако $T(q, \dot{q}, t)$ е хомогенна функция от втора степен на обобщените скорости, и $U(q, t)$ не зависи от скоростите, то $H = T + U$, тоест хамилтонианът е равен на пълната механична енергия. Но ако T_0 или 1 са ненулеви, или потенциалът зависи от скоростите, тогава $H \neq T + U$.

²Ако не сте сигурни защо е така, вижте тук: <https://en.wikipedia.org/wiki/Scleronomous>

Задача 3 Заредена частица в магнитно поле

Нека разгледаме заредена частица движеща се в ЕМ поле. Потенциалната и енергия е:

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = q\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.15)$$

Виждаме че потенциалната енергия зависи от скоростта. Кинетичната енергия, както винаги е $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$. Тук $\phi(\mathbf{r})$ е скаларният потенциал и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ е векторния потенциал. Те са свързани с електричното и магнитното поле посредством:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.16)$$

Каноничния импулс е тогава:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (2.17)$$

и отгук хамилтониана е (пропускам няколко стъпки които вие ще трябва да си направите)

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + q\phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

Ако \mathbf{A} и ϕ не зависят от времето, то $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ е запазваща се величина. Нека намерим уравненията за движение. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \Rightarrow \\ m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= -q\nabla\phi + \frac{q}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \Rightarrow \\ m\ddot{x}_i + \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} &= -q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{q}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \Rightarrow \\ m\ddot{x}_i &= -q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Полезно е да изразим векторното произведение в термини на тензора на Леви-Чевита:

$$B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}. \quad (2.20)$$

Знаем също че

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \quad (2.21)$$

тоест $\epsilon_{ijk}B_i = \partial A_k/\partial x_j - \partial A_j/\partial x_k$. Тогава можем да запишем:

$$m\ddot{x}_i = -q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q}{c} \epsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k. \quad (2.22)$$

Във векторен запис това изглежда по следният начин:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.23)$$

Или финално

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}}, \quad (2.24)$$

което е и закона за лоренцова сила, както очаквахме.

Класическа механика - Механика с Връзки

Иво Илиев

1 Връзки и закони за запазване

Видяхме че инвариантността на Лагранжиана относно еднопараметрично семейство от координатни трансформации води до съответна запазваща се величина A . Видяхме също, че ако нямаме експлицитна зависимост от времето в Лагранжиана това което се запазва е Хамилтониана H . При извеждането на тези резултати обаче използвахме уравненията за движение $\dot{p}_\sigma = F_\sigma$. Какво ще се получи ако имаме връзки, тоест ако $\dot{p}_\sigma = F_\sigma + Q_\sigma$? Нека започнем с Хамилтониана. Имаме $H = \dot{q}_\sigma p_\sigma - L$ следователно:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \left(p_\sigma - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \ddot{q}_\sigma + \left(\dot{p}_\sigma - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= Q_\sigma \dot{q}_\sigma - \frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Използвайки

$$Q_\sigma \dot{q}_\sigma = \lambda_j g_{j\sigma} \dot{q}_\sigma = -\lambda_j h_j,\tag{1.2}$$

получаваме:

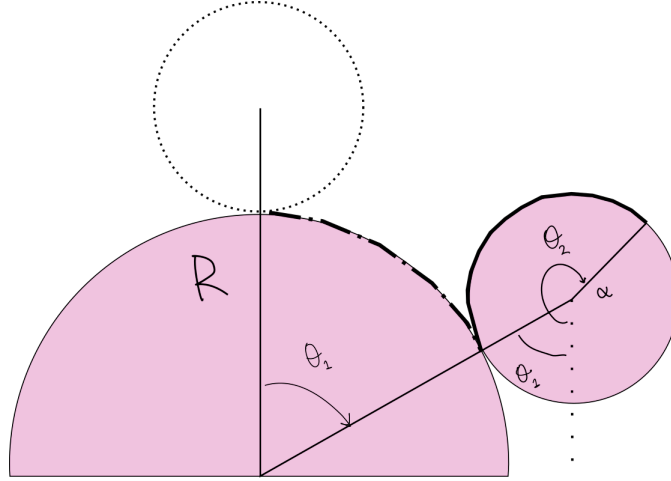
$$\frac{dH}{dt} = -\lambda_j h_j - \frac{\partial L}{\partial t}.\tag{1.3}$$

Можем да заключим че в система с връзки от вида $g_{j\sigma} \dot{q}_\sigma + h_j = 0$, Хамилтонианът се запазва ако всяко $h_j = 0$ и L не зависи експлицитно от времето. В случай на холономни връзки, $h_j = \frac{\partial G_j}{\partial t}$, то H се запазва ако нито L , нито някоя от връзките G_j зависи експлицитно от времето. Нека сега изведем теоремата на Ньотер за системата с връзки. Предполагаме че еднопараметрично семейство от трансформации $q_\sigma \rightarrow \tilde{q}_\sigma(\epsilon)$ оставя L инвариантен. Тогава:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{dL}{d\epsilon} = \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_\sigma} \frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_\sigma} \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_\sigma}{\partial \epsilon} \\ &= (\dot{p}_\sigma - \tilde{Q}_\sigma) \frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \epsilon} + \tilde{p}_\sigma \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \epsilon} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\tilde{p}_\sigma \frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \epsilon} - \lambda_j \tilde{g}_{j\sigma} \frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \epsilon} \right).\end{aligned}$$

Нека запишем връзките в диференциална форма

$$\tilde{g}_{j\sigma} d\tilde{q}_\sigma + \tilde{h}_j dt + \tilde{k}_j d\epsilon = 0.\tag{1.4}$$



Фигура 1: Цилиндър търкалящ се по друг цилиндър

Имаме:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \lambda_j \tilde{k}_j. \quad (1.5)$$

Горният израз твърди, че ако връзките не зависят от ϵ , то Λ се запазва. За холономни връзки това означава, че

$$G_j(\tilde{q}(\epsilon), t) = 0 \Rightarrow \tilde{k}_j = \frac{\partial G_j}{\partial \epsilon} = 0, \quad (1.6)$$

тоест $G_j(\tilde{q}, t)$ няма експлицитна зависимост от ϵ .

2 Примери и решения

Задача 1 (Цилиндър търкалящ се по друг цилиндър) Разгледайте системата на Фигура (1), за която са дефинирани две връзки:

$$\begin{aligned} G_1(r, \theta_1, \theta_2) &= r - R - a = 0 && \text{(цилиндрите се докосват)} \\ G_2(r, \theta_1, \theta_2) &= R\theta_1 - a(\theta_2 - \theta_1) = 0 && \text{(нямаме приплъзване)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение: Веднага можем да организираме матрицата $g_{j\sigma}$:

$$g_{j\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R + a & -a \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

което идва разбира се от факта че:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial r} &= 1 & \frac{\partial G_1}{\partial \theta_1} &= 0 & \frac{\partial G_1}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial G_2}{\partial \theta_1} &= R + a & \frac{\partial G_2}{\partial \theta_2} &= -a. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Лагранжианът е

$$L = T - U = \frac{1}{2}M \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}_1^2 \right) + \frac{1}{2}I \dot{\theta}_2^2 - Mgr \cos \theta_1, \quad (2.4)$$

където M и I са съответно масата и инерциалният момент на търкалящият се цилиндър. Отбележете че кинетичната енергия е сбор от трансляции спрямо центъра на масите $T_{tr} = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_1^2)$ и въртене относно центъра на масите $T_{rot} = \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2$. Уравненията за движение се получават:

$$M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}_1^2 + Mg \cos \theta_1 = \lambda_1 \equiv Q_r \quad (2.5)$$

$$Mr^2\ddot{\theta}_1 + 2Mr\dot{r}\dot{\theta}_1 - Mgr \sin \theta_1 = (R+a)\lambda_2 \equiv Q_{\theta_1} \quad (2.6)$$

$$I\ddot{\theta}_2 = -a\lambda_2 \equiv Q_{\theta_2}. \quad (2.7)$$

Добавяйки към тези уравнения връзките получаваме система от 5 уравнения за 5-те неизвестни. Започваме като първо решаваме връзките, които ни дават $r = R+a$ като константа тоест $\dot{r} = 0$ и $\dot{\theta}_2 = (1 + \frac{R}{a})\dot{\theta}_1$. Замествайки в горните уравнения получаваме:

$$-M(R+a)\dot{\theta}_1^2 + Mg \cos \theta_1 = \lambda_1 \quad (2.8)$$

$$M(R+a)^2\ddot{\theta}_1 - Mg(R+a) \sin \theta_1 = (R+a)\lambda_2 \quad (2.9)$$

$$I \left(\frac{R+a}{a} \right) \ddot{\theta}_1 = -a\lambda_2. \quad (2.10)$$

Последното уравнение ни дава:

$$\lambda_2 = -\frac{I}{a}\ddot{\theta}_2 = -\frac{R+a}{a^2}I\ddot{\theta}_1, \quad (2.11)$$

което замествайки пък във второто уравнение от (2.10) получаваме:

$$\left(M + \frac{I}{a^2} \right) (R+a)^2\ddot{\theta}_1 - Mg(R+a) \sin \theta_1 = 0. \quad (2.12)$$

Умножавайки по $\dot{\theta}_1$, получаваме пълен диференциал, който интегрирайки довеждаме до:

$$\frac{1}{2}M \left(1 + \frac{I}{Ma^2} \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{Mg}{R+a} \cos \theta_1 = \frac{Mg}{R+a} \cos \omega, \quad (2.13)$$

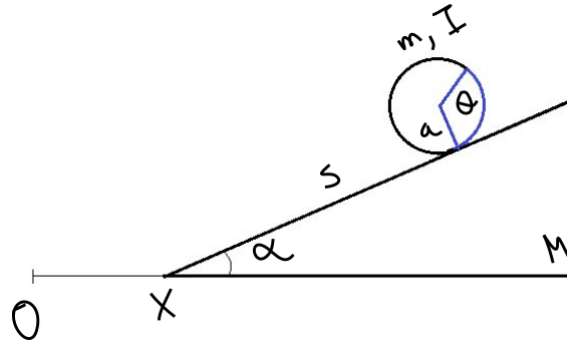
където сме предположили че $\dot{\theta}_1 = 0$ когато $\theta_1 = \omega$, тоест, че в началният момент търкалящият се цилиндър е поставен на $\theta_1 = \omega$ и е в покой. Замествайки това в първото уравнение от (2.10) получаваме за радиалната сила на връзката:

$$Q_r = \frac{Mg}{1+\alpha} \{ (3+\alpha) \cos \theta_1 - 2 \cos \omega \}, \quad (2.14)$$

където $\alpha = I/Ma^2$ е безразмерен параметър ($0 \leq \alpha \leq 1$). Това е радиалната компонента на нормалната сила между двата цилиндъра. Когато Q_r е нула цилиндриците спират да се докосват - търкалящият се цилиндър пада в небитието :D . Очевидно това се случва при ъгъл $\theta_1 = \theta'_1$, където

$$\theta'_1 = \arccos \left(\frac{2 \cos \omega}{3 + \alpha} \right). \quad (2.15)$$

Ъгълът на отделяне θ'_1 е растяща функция на α , което означава че за по-голям инерциален момент I отделянето се забавя. Това има смисъл, тъй като когато I е голямо, увеличаването на кинетична енергия се разпределя между трансляционно и ротационно движение на цилиндъра.



Фигура 2: Наклонената равнина и дискът търкалящ се по нея

Задача 2 (Скиор по хълм) Представете си че скиор се движи без триене под влияние на гравитация по хълм с профил функцията $y = h(x)$. Лагранжианът за тази система е:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy, \quad (2.16)$$

с (холономна) връзка:

$$G(x, y) = y - h(x) = 0. \quad (2.17)$$

За домашно се опитайте да решите тази задача и да намерите кога скиорът би се отделил от земята. След няколко дни ще ви пратя решение. Задачата не е особено лека, но според мен е интересна.

Задача 3 (Диск търкалящ се по наклонена равнина) Диск с маса m и радиус R се търкаля без приплъзване по наклонена равнина. Равнината има ъгъл на разтваряне α , маса M и самата тя се търкаля без триене по хоризонтална плоскост. Опишете движението на системата.

Решение: Скецирали сме системата на Фигура (2). Центърът на диска се намира на координати:

$$x = X + s \cos \alpha - a \sin \alpha \quad (2.18)$$

$$y = s \sin \alpha + a \cos \alpha, \quad (2.19)$$

където X е позицията на долния ляв ъгъл на клина и s е отстоянието по клина до допирната точка на диска. Ако диска се е завъртя на ъгъл θ , условието за липса на приплъзване е $a\dot{\theta} + \dot{s} = 0$. Тогава:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgy \\ &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(M + m)\dot{X}^2 + m \cos \alpha \dot{X} \dot{s} - mgs \sin \alpha - mga \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Тъй като X е циклична координата в L , импулсът

$$P_X = (M + m)\dot{X} + m \cos \alpha \dot{s}, \quad (2.21)$$

се запазва: $\dot{P}_X = 0$. Второто уравнение за движение, отговарящо на обобщената координата s , е

$$\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right)\ddot{s} + \cos \alpha \ddot{X} = -g \sin \alpha. \quad (2.22)$$

Използвайки завазването на P_X , можем да елиминираме \ddot{s} и да получим:

$$\dot{X} = \frac{g \sin \alpha \cos \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right)\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right) - \cos^2 \alpha} \equiv a_X \quad (2.23)$$

което води до:

$$\ddot{s} = -\frac{g\left(1 + \frac{M}{m}\right) \sin \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right)\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right) - \cos^2 \alpha} \equiv a_s. \quad (2.24)$$

Следва директно:

$$X(t) = X(0) + \dot{X}(0)t + \frac{1}{2}a_X t^2 \quad (2.25)$$

$$s(t) = s(0) + \dot{s}(0)t + \frac{1}{2}a_s t^2. \quad (2.26)$$

Отбележете че $a_s < 0$ докато $a_X > 0$, тоест диска се търкаля надолу и наляво, докато клина се плъзга надясно. Също, макар да сме сметнали инерциалният момент за общия случай, ако искаме да се рестриктираме до диск можем да положим $I = \frac{1}{2}ma^2$.

P.S. Има вероятност моите означения да се различават от тези, които сте ползвали на лекции. Моля да ми пишете ако задачите са неразбираеми и ще се постарая да обясня всичките си означения - Иво.

Класическа механика - Механика с Връзки 2

Иво Илиев

1 Още задачи

Задача 1 (Махало с гъвкава нишка) Материална точка с маса m е закрепена за гъвкава нишка с дължина l в присъствието на равномерно гравитационно поле. Докато стои неподвижна в равновесно положение, тя е ударена странично, довеждайки до ъглова скорост ω_0 . Разглеждайки системата като система с две степени на свобода и връзка, отговорете на следните въпроси:

- (а) Напишете лагранжианът, уравнението на връзката и намерете уравненията за движение
- (б) Изчислете силата на опън на нишката като функция на ъгла на отклонение θ .
- (в) Покажете, че ако $\omega_0^2 < 2g/l$, то движението на материалната точка е ограничено под хоризонталата, и че опън на нишката е винаги положителен (дефинирано така че "положително" означава, че нишката "дърпа" точката а отрицателно - че нишката "бута" точката). Отбележете, че разликата между нишка и недеформируема пръчка е, че нишката може само да "дърпа", докато пръчката може да "дърпа" или да "бута". Тоест, ако силата на опън на нишката стане отрицателна, тя би просто се "размекнала" и не би участвала в движението (представете си падаща топка с нишка вързана към земята - нишката не играе роля когато не е опъната).
- (г) Покажете, че ако $2g/l < \omega_0^2 < 5g/l$ то материалната точка се изкачва над хоризонталата и нишката се размеква (опън изчезва) при ъгл θ^* . Намерете този ъгл.
- (д) Покажете, че ако $\omega_0^2 > 5g/l$, силата на опън винаги е положителна. Истина ли е че тогава имаме кръгово движение?

Решение:

- (а) Директно можем да напишем лагранжианът:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta. \quad (1.1)$$

Връзката е много проста в нашите полярни координати: $r = l$. Тогава уравненията за движение са:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta &= \lambda \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta} - mg \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

(б) От закона за запазване на енергията имаме:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 - mgl \cos \theta_0. \quad (1.3)$$

По условие $\theta_0 = 0, \dot{\theta}_0 = \omega_0$. Тогава:

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 - 2\Omega^2(1 - \cos \theta), \quad (1.4)$$

където сме означили $\Omega = \sqrt{g/l}$. Замествайки това в уравнението за λ получаваме:

$$\lambda = mg \left\{ 2 - 3 \cos \theta - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right\}. \quad (1.5)$$

(в) Тъй като $\dot{\theta}^2 \geq 0$, то трябва да е валидно:

$$\frac{\omega_0^2}{2\Omega^2} \geq 1 - \cos \theta. \quad (1.6)$$

Нишката се размеква при $\lambda = 0$, или

$$\frac{\omega_0^2}{2\Omega^2} = 1 - \frac{3}{2} \cos \theta. \quad (1.7)$$

Тогава, ако $\omega_0^2 < 2\Omega^2$, имаме:

$$1 > \frac{\omega_0^2}{2\Omega^2} > 1 - \cos \theta > 1 - \frac{3}{2} \cos \theta, \quad (1.8)$$

тоест, връвчицата никога не се размеква. Забележете, че последното твърдение следва от $\cos \theta > 0$. Връвчицата се издига до максимален ъгъл:

$$\theta_{\max} = \arccos \left(1 - \frac{\omega_0^2}{2\Omega^2} \right). \quad (1.9)$$

(г) Когато $\omega_0^2 > 2\Omega^2$, връвчицата се издига над хоризонталата и се размеква на ъгъл

$$\theta^* = \arccos \left(\frac{2}{3} - \frac{\omega_0^2}{3\Omega^2} \right). \quad (1.10)$$

Това решение се осира, когато връвчицата не се е размекнала при $\theta = \pi$, тоест когато $\omega_0^2 = 5\Omega^2$.

(д) За $\omega_0^2 > 5\Omega^2$ връвчицата никога не се размеква. Още повече $\dot{\theta}$ никога не става равно на нула. Следователно, махалото описва кръгови движения, макар и не с постоянна ъглова скорост.

Задача 2 Еднородна "стълба" с дължина l и маса m е поставена на гладък хоризонтален под, облежната на гладка хоризонтална стена. В началния момент стълбата е в покой и сключва ъгъл θ_0 спрямо хоризонталата.

- (а) Направете смислен избор за обобщени координати и намерете лагранжиана.
- (б) Докажете, че когато стълбата спира да се допира до стената, горният и край паднал от височина $\frac{2}{3}L \sin \theta_0$.
- (в) Покажете, че последвалото движение може да се изрази в квадратури (тоест, явни интеграли).
- (г) Намерете израз за времето (θ_0) което е нужно на стълбата да падне на пода. Интегрирайте числено този израз и нарисуйте T като функция на θ_0 .
- (д) След дълго време, каква е хоризонталната скорост на стълбата?
- (е) Опишете качествено (с думи) движението на стълбата след като тя пада на земята.

Решение:

- (а) Ще изберем малко нетривиални координати - декартовите координати на центъра на масата на стълбата (x, y) и ъгъла θ , който тя сключва със земята. Лагранжианът тогава е:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgy. \quad (1.11)$$

Имаме две връзки - едната ни задължава да сме допрени до стената а другата да сме допрени до пода:

$$G_1(x, y, \theta) = x - \frac{1}{2}l \cos \theta = 0 \quad (1.12)$$

$$G_2(x, y, \theta) = y - \frac{1}{2}l \sin \theta = 0. \quad (1.13)$$

- (б) Уравненията за движение са:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial q_\sigma}. \quad (1.14)$$

Тоест, имаме:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 = Q_x \quad (1.15)$$

$$m\ddot{y} + mg = \lambda_2 = Q_y \quad (1.16)$$

$$I\ddot{\theta} = \frac{1}{2}l(\lambda_1 \sin \theta - \lambda_2 \cos \theta) = Q_\theta. \quad (1.17)$$

Решаваме връзките за да елиминираме x, y в полза на θ :

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}l \sin \theta \dot{\theta} \quad \ddot{x} = -\frac{1}{2}l \cos \theta \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}l \sin \theta \ddot{\theta} \quad (1.18)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2}l \cos \theta \dot{\theta} \quad \ddot{y} = -\frac{1}{2}l \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}l \cos \theta \ddot{\theta}$$

Вече можем да намерим силата на връзките в термини на $\theta(t)$:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}ml(\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) \quad (1.19)$$

$$\lambda_2 = +\frac{1}{2}ml(\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2) + mg. \quad (1.20)$$

Заместваме тези изрази в уравненията за движение:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= -I_0\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mgl \cos \theta \\ \Rightarrow &= (1 + \alpha)\ddot{\theta} = -2\omega_0^2 \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.21)$$

където $I_0 = \frac{1}{4}ml^2$, $\alpha \equiv I/I_0$, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Това може да бъде добувано до пълна производна като умножим с $\dot{\theta}$, след което интегрирано за да получим:

$$\frac{1}{2}(1 + \alpha)\dot{\theta}^2 + 2\omega_0^2 \sin \theta = 2\omega_0^2 \sin \theta_0, \quad (1.22)$$

което е твърдение за за преобразуването на енергията в системата. От тук:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4\omega_0^2(\sin \theta_0 - \sin \theta)}{1 + \alpha} \quad (1.23)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\omega_0^2 \cos \theta}{1 + \alpha} \quad (1.24)$$

Сега можем да получим функциите $\lambda_{1,2}(\theta)$:

$$\lambda_1(\theta) = -\frac{mg}{1 + \alpha}(3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0) \cos \theta \quad (1.25)$$

$$\lambda_2 = \frac{mg}{1 + \alpha} \{(3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0) \sin \theta + \alpha\}. \quad (1.26)$$

Задължавайки $\lambda_1(\theta) = 0$, получаваме ъгъла на отделяне $\theta = \theta_{\text{det}}$, където:

$$\sin \theta_{\text{det}} = \frac{2}{3} \sin \theta_0. \quad (1.27)$$

Отбележете че $\lambda_2(\theta_{\text{det}}) = mg\alpha(1 + \alpha) > 0$, така че нормалната сила от пода е винаги положителна за $\theta > \theta_{\text{det}}$. Времето за отделяне е:

$$T_1(\theta_0) = \int \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{2\omega_0} \int_{\theta_{\text{det}}}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}}. \quad (1.28)$$

(в) След отделянето вече нямаме първата връзка. Уравненията за движение са:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{Запазване на х-импулса} \quad (1.29)$$

$$m\ddot{y} + mg = \lambda \quad (1.30)$$

$$I\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}l\lambda \cos \theta, \quad (1.31)$$

заедно с връзката $y = \frac{1}{2}l \sin \theta$. Изразявайки θ чрез y от връзката получаваме:

$$\lambda = mg - \frac{1}{2}ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml \cos \theta \ddot{\theta}. \quad (1.32)$$

Замествайки в третото уравнение:

$$I\ddot{\theta} - 2I_0\omega_0^2 \cos \theta + I_0 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 - I_0 \cos^2 \theta \ddot{\theta}. \quad (1.33)$$

Умножавайки по $\dot{\theta}$ отново получаваме пълна производна по времето, което е същото като да открием топлата вода със закона за запазване на енергията:

$$E = \frac{1}{2}(I + I_0 \cos^2 \theta)\dot{\theta}^2 + 2I_0\omega_0^2 \sin \theta. \quad (1.34)$$

Искаме движението да е непрекъснато, което ни дава начални условия за тази втора фаза на движението:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3} \sin \theta_0\right) \quad (1.35)$$

$$\dot{\theta} = -2\omega_0 \sqrt{\frac{\sin \theta_0}{3(1 + \alpha)}}. \quad (1.36)$$

От тук получаваме красивият израз:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(I + I_0 - \frac{4}{9}I_0 \sin^2 \theta_0) \cdot \frac{4\omega_0^2 \sin \theta_0}{3(1 + \alpha)} + \frac{1}{3}mgl \sin \theta_0 \\ &= 2I_0\omega_0^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{4 \sin^2 \theta_0}{27(1 + \alpha)} \right\} \sin \theta_0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

(г) Времето от отделяне до сблъсък със земята е:

$$T_2(\theta_0) = \int \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{\theta_{\text{det}}} d\theta \sqrt{\frac{1 + \alpha \cos^2 \theta}{(1 - \frac{4}{27} \frac{\sin^2 \theta_0}{1 + \alpha}) \sin \theta_0 - \sin \theta}}. \quad (1.38)$$

Тогава пълното време е $T(\theta_0) = T_1(\theta_0) + T_2(\theta_0)$. За хомогенно плътна стълба $I = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{3}I_0$, тоест, $\alpha = \frac{1}{3}$. Графика на численото решение е дадена на Фигура (1).

(д) От момента на отделяне до безкрайност по времето:

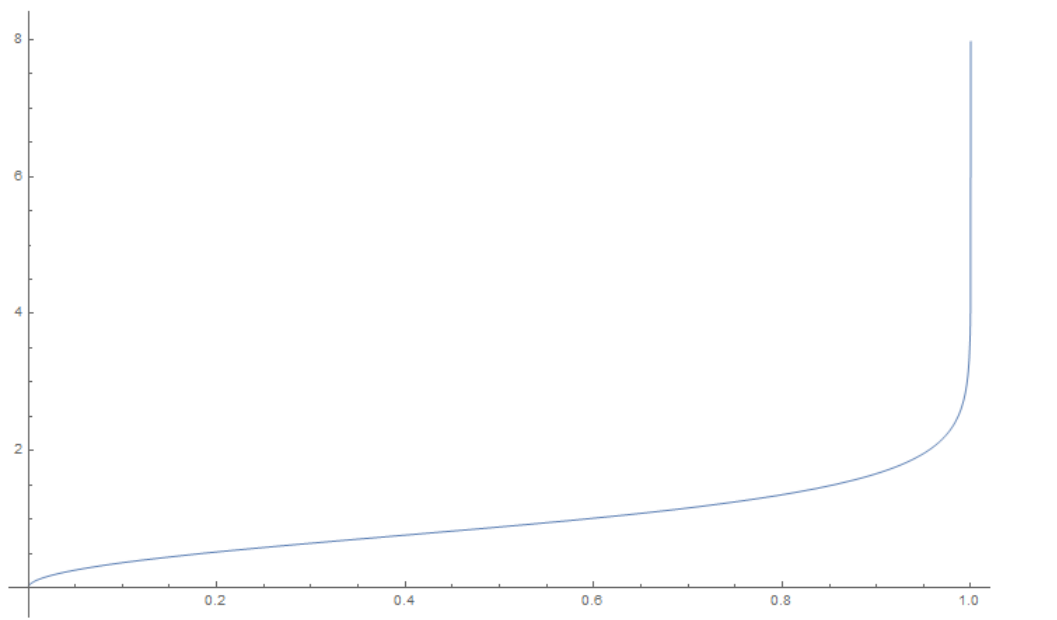
$$\dot{x} = -\frac{1}{2}l \sin \theta \dot{\theta} = \sqrt{\frac{4gl}{27(1 + \alpha)}} \sin^{3/2} \theta_0. \quad (1.39)$$

(е) "Само част от началната потенциална енергия на стълбата се превръща в кинетична енергия на хоризонтално движение. Останалата част се превръща в кинетична енергия на вертикално движение и въртене. Ударите на стълбата в земята са еластични. След удар, стълбата отново се издига, и продължава да се издига и пада *ad infinitum*, докато се плъзга с постоянна хоризонтална скорост."

```

In[31]:= T[x_] := NIntegrate[ $\sqrt{(4/3) / (x - \text{Sin}[y])}$ , {y, ArcSin[2 x / 3], ArcSin[x] - 10-9}] / 2
S[x_] := NIntegrate[ $\sqrt{(1 + (1/3) (\text{Cos}[y])^2) / ((1 - (x/3)^2) x - \text{Sin}[y])}$ , {y, 0, ArcSin[2 x / 3]}] / 2
Q[x_] := T[x] + S[x]
Plot[Q[x], {x, 0, 1}, PlotRange -> Full]

```



Фигура 1: Числено интегриране и рисуване на графика за времето за падане на плъзгаща се стълба. Тук $\omega_0 = 1, \alpha = 1/3, x = \sin \theta_0$. Използваният софтуер е Wolfram Mathematica версия 12.1

Класическа механика - Централни Сили (Орбитална механика)

Иво Илиев

1 Централен потенциал

Нека разгледаме две материални точки, взаимодействащи си посредством потенциал $U(r_1, r_2) = U(|r_1 - r_2|)$. Такъв потенциал, зависещ само от относителното разстояние между материалните точки се нарича централен. Лагранжианът за такава система е:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - U(|r_1 - r_2|) \quad (1.1)$$

Знаем, че в система център на масите такава задача се разделя на две независими едночастични задачи. Нека отбележим радиус-вектора на центъра на масите с R . Тогава:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} & \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тогава лагранжиана добива вида:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

където сме отбелязали:

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 && \text{(пълна маса)} \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} && \text{(редуцирана маса)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Веднага виждаме, че $\partial L / \partial R = 0$, което дава $\dot{R}d = 0$, тоест:

$$R(t) = R(0) + \dot{R}(0)t. \quad (1.5)$$

Тоест, задачата за център на масите е тривиална - той се движи с постоянна скорост.

2 Закони на Кеплер и още нещо

2.1 Запазване на момента на импулса

Забелязваме, че $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ е константа. Следователно, движението $\mathbf{r}(t)$ е рестриктирано в равнината, перпендикулярна на ℓ . Ще е удобно да преинем в полярни координати (r, ϕ) . Големината на ℓ ще е:

$$\ell = \mu r^2 \dot{\phi} = 2\mu \dot{\mathcal{A}}, \quad (2.1)$$

където $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2 d\phi$ е диференциалната площ заметена при движението. От тук можем да съдим че *относителните радиус-вектори за централна задача замитат равни площи за равно време*. Това е известно като втори закон на Кеплер. Ако си мислим за орбити на планети, то колкото е по-далеч планетата от Слънцето (относителния радиус вектор с по-голяма дължина), толкова по-бавно тя ще се движи. Понякога се използва терминът "площна скорост".

2.2 Запазване на Енергията

Уравнението за движение по r е:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (2.2)$$

Нека го умножим скаларно по \dot{r} . Имаме:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \ddot{r} \cdot \dot{r} + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \dot{r} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r) \right\} = \frac{dE}{dt} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тоест, приноса към енергията от координата r се запазва. Разбира се, пълната енергия на системата е $E_{tot} = E + \frac{1}{2}M\dot{R}^2$. Тъй като ℓ се запазва и $r \cdot \ell = 0$, цялото движение е ограничено върху равнина, перпендикулярна на ℓ . Избирайки координати в които $\hat{z} = \hat{\ell}$, имаме:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (2.5)$$

2.3 Интегриране на уравненията за движение

Имаме:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \mu \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} - \frac{dU(r)}{dr} = -\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} \quad (2.6)$$

Трябва да отбележим обаче че това уравнение се свежда до уравнение от първи ред когато наложим:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r))} \Rightarrow dt = \pm \frac{\sqrt{\frac{\ell}{2}} dr}{\sqrt{E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - U(r)}} \quad (2.7)$$

. Този израз ни дава $t(r)$, трябва да го обърнем за да получим $r(t)$. Отбележете, че тук вече излиза една интеграционна константа, нека я наречем r_0 .

Веднъж щом сме намерили $r(t)$ можем да намерим $\phi(t)$ използвайки запазването на ℓ .

$$\phi = \frac{\ell}{\mu r^2} \Rightarrow d\phi = \frac{\ell}{\mu r^2(t)} dt \quad (2.8)$$

Това ни дава $\phi(t)$ и добавя още една интеграционна константа, ϕ_0 .

Нека се замислим за броят константи. Тъй като сме ограничени върху равнина заради запазването на момента на импулса, вектора r има два компонента - две степени на свобода. Уравненията за движение са от втори ред по времето, което води до 4 интеграционни константи. Наистина имаме четири константи - E, ℓ, r_0, ϕ_0 .

2.4 Уравнение за орбитата

От $\ell = \mu r^2 \dot{\phi}$ получаваме

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2} \frac{d}{d\phi}, \quad (2.9)$$

което води до

$$\frac{d^2 r}{d\phi^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{\mu r^4}{\ell^2} F(r) + r. \quad (2.10)$$

Тук с $F(r) = -dU(r)/dr$ сме отбелязали големината на централната сила. Отново, може да използваме запазването на енергията за да свалим реда на уравненията:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \\ &= \frac{\ell^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + U_{\text{eff}}(r). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тоест,

$$d\phi = \pm \frac{\ell}{\sqrt{2\mu}} \cdot \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}, \quad (2.12)$$

което можем да интегрираме за да получим $\phi(r)$ и след това да обърнем за да получим $r(\phi)$. Отбележете, че ни е нужно само едно интегриране за да намерим формата на орбитата. Ако искаме да намерим пълното движение трябва обаче да интегрираме два пъти - веднъж за $r(t)$ и веднъж за $\phi(t)$.

Понякога е удобно да запишем уравненията в термини на $s = 1/r$:

$$\frac{d^2 s}{d\phi^2} + s = -\frac{\mu}{\ell^2 s^2} F(s^{-1}). \quad (2.13)$$

2.4.1 Логаритмична спирала

Нека предположим, че орбитата ни е логаритмична спирала $r(\phi) = ke^{\alpha\phi}$. Каква е силата? Отговорът е лесен - нека използваме (2.10), набутвайки $s''(\phi) = \alpha^2 s$ в него. Пресмятаме,

$$F(s^{-1}) = -(1 + \alpha^2) \frac{\ell^2}{\mu} s^3 \Rightarrow F(r) = -\frac{C}{r^3}, \quad (2.14)$$

където

$$\alpha^2 = \frac{\mu C}{\ell^2} - 1 \quad (2.15)$$

Общото решение за $s(\phi)$ за такава сила е:

$$s(\phi) = \begin{cases} A \cosh(\alpha\phi) + B \sinh(-\alpha\phi) & \text{if } \ell^2 > \mu C \\ A' \cosh(|\alpha|\phi) + B' \sin(|\alpha|\phi) & \text{if } \ell^2 < \mu C \end{cases} \quad (2.16)$$

Логаритмичната спирала е специален случай на първия вид орбита.

2.5 Почти кръгови орбити

Една кръгова орбита с уравнение $r(t) = r_0$ удовлетворява $\ddot{r}(t) = 0$, което означава, че $U'_{\text{eff}}(r_0) = 0$, което пък означава, че $F(r_0) = -\ell^2/\mu r_0^3$. Това е винаги отрицателно, което означава, че кръгова орбита е възможна само ако силата е сила на привличане (поне на някакво разстояние). Тъй като производната на r също е нула, трябва да е вярно, че $E = U_{\text{eff}}(r_0)$.

Нека дефинираме "почти-кръгова" орбита, като орбита с уравнение $r(t) = r_0 + \eta(t)$, където $|\eta/r_0| \ll 1$. Развивайки в ред по малкия параметър η , получаваме:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\omega^2\eta \quad , \quad \omega^2 = \frac{1}{\mu} U''_{\text{eff}}(r_0). \quad (2.17)$$

Ако $\omega^2 > 0$, кръговата орбита е стабилна и пертурбациите осцилират хармонично. Ако $\omega^2 < 0$, кръговата орбита е нестабилна и пертурбациите растат експоненциално. За да намерим геометричната форма на пертурбираната орбита, нека запишем $r = r_0 + \eta$. От (2.10) получаваме:

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} = \left(\frac{\mu r_0^4}{\ell^2} F'(r_0) - 3 \right) \eta = -\beta^2 \eta, \quad (2.18)$$

където

$$\beta^2 = 3 + \left. \frac{d \ln F(r)}{d \ln r} \right|_{r_0} \quad (2.19)$$

Вярвайте ми, че решението е

$$\eta(\phi) = \eta_0 \cos \beta(\phi - \delta_0), \quad (2.20)$$

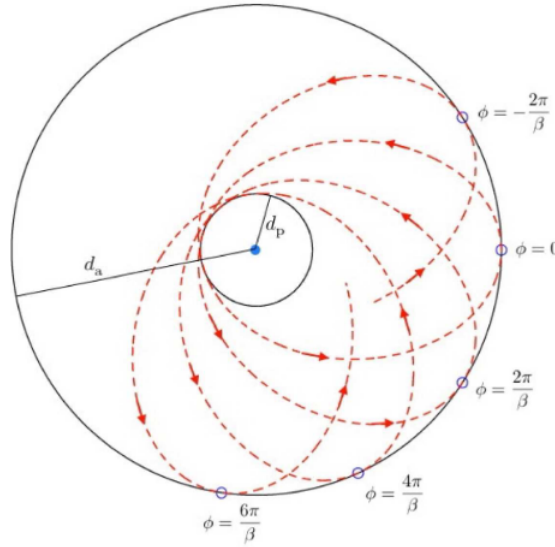
където η_0 и δ_0 са начални условия. Налагайки $\eta = \eta_0$, получаваме стойности за ϕ .

$$\phi_n = \delta_0 + \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (2.21)$$

за които $\eta(\phi)$ е в локален максимум, тоест *апоапсис*, където $r = r_0 + \eta_0$. Налагайки $r = r_0 - \eta_0$, то имаме точка на най-голямо приближение, тоест *периапсис*. Виждаме, че получавам подобно множество от тгли, но изместени с π . Разликата

$$\Delta\phi = \phi_{n+1} - \phi_n - 2\pi = 2\pi(\beta^{-1} - 1), \quad (2.22)$$

е стойността с която апсидите (апоапсиса и периапсиса) *прецесират* на всеки цикъл. Ако $\beta > 1$, апсидите избързват, тоест имаме по-малко от цяла обиколка $\delta\phi = 2\pi$ между последователни периапсиси. Ако $\beta < 1$, то апсидите закъсняват и имаме повече от цяла обиколка между последователни периапсиси. На (2.10) е показан случай с $\beta = 1.1$. Отбележете, че ако $\beta = p/q$, рационално число, то орбитата е затворена, тоест тя след време започва да се повтаря, на всеки q обиколки. Ако обаче β е ирационално число, орбитата никога не се затваря.



Фигура 1: Прецесия на геометрична орбите $r(\phi) = r_0/(1 - \epsilon \cos \beta\phi)$, за $\beta = 1.1$. Периапсисът и апоапсисът избързват с $\Delta\phi = 2\pi(1 - \beta^{-1})$ на всеки цикъл

2.5.1 Решим модел

Нека дадем един точно решим пример. Нека $F(r) = -kr^{-\alpha}$. Решавайки за кръгова орбита, получаваме:

$$U'_{\text{eff}} = \frac{k}{r^\alpha} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = 0, \quad (2.23)$$

която има решение само за $k > 0$, отговарящо на потенциал на привличане. Намираме:

$$r_0 = \left(\frac{\ell^2}{\mu k} \right)^{1/(3-\alpha)}, \quad (2.24)$$

и $\beta^2 = 3 - \alpha$. Формата на пертурбираните орбити следва от $\eta'' = -\beta^2\eta$. Можем да съдим, че въпреки че кръгови орбити съществуват когато $k > 0$, малките пертурбации около тези орбити са стабилни само когато $\beta^2 > 0$, тоест, когато $\alpha < 3$. В този случай

$\eta(\phi) = A \cos \beta(\phi - \phi_0)$. Пертурбирани орбити са затворени (поне до първи порядък по η), за $\alpha = 3 - (p/q)^2$, тоест за $\beta = p/q$.

2.6 Прецесия в решим модел

Нека започнем с отговора и работим наобратно. Имаме геометричната орбита

$$r(\phi) = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \beta \phi}. \quad (2.25)$$

Интересуват ни ограничени орбити, за които $0 \leq \epsilon \leq 1$ (отново гледаме (2.10)). Какви потенциали водят до такива орбити? Записвайки $s = 1/r$, имаме:

$$s(\phi) = s_0(1 - \epsilon \cos \beta \phi). \quad (2.26)$$

Замествайки отново в любимото ни уравнение (2.10), получаваме (след малко сметки)

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{\ell^2 s^2} F(s^{-1}) &= \frac{d^2 s}{d\phi^2} + s \\ &= \beta^2 s_0 \epsilon \cos \beta \phi + s \\ &= (1 - \beta^2) s + \beta^2 s_0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

от което заключаваме че

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3}, \quad (2.28)$$

със

$$k = \beta^2 s_0 \frac{\ell^2}{\mu}, \quad C = (\beta^2 - 1) \frac{\ell^2}{\mu}. \quad (2.29)$$

Съответния потенциал е

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2} + U_\infty, \quad (2.30)$$

където U_∞ е произволна константа, която можем да сложим нула. Слагаме я нула. Ако μ и C са дадени, имаме:

$$r_0 = \frac{\ell^2}{\mu k} + \frac{C}{k}, \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\mu C}{\ell^2}}. \quad (2.31)$$

Когато $C = 0$, разглеждането се свежда до кеплеровата задача. Отбележете, че при $\ell^2 + \mu C < 0$, ефективният потенциал нараства монотонно като функция на координатата r . В този случай, бариерата на моментът на импулса бива преодоляна от (привличащата, $C < 0$) част на потенциала пропорционална на $1/r^2$. В този случай орбитата преминава през центъра на силата. Полезно е да се опитате да изкарате пълната енергия за орбитата:

$$E = (\epsilon^2 - 1) \frac{\mu k^2}{2(\ell^2 + \mu C)} \iff \epsilon^2 = 1 + \frac{2E(\ell^2 + \mu C)}{\mu k^2}. \quad (2.32)$$

3 Кеплеровата задача $U(r) = -kr^{-1}$

3.1 Геометрична форма на орбитите

Силата е $F = -kr^{-2}$, тоест уравнението за геометричната форма на орбитата е

$$\frac{d^2 s}{d\phi^2} = -\frac{\mu}{\ell^2 s^2} F(s^{-1}) = \frac{\mu k}{\ell^2}. \quad (3.1)$$

Най-общото решение се дава от:

$$s(\phi) = s_0 - C \cos(\phi - \phi_0), \quad (3.2)$$

където, както можете да се досетите, C и ϕ_0 са константи. Тогава:

$$r(\phi) = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}, \quad (3.3)$$

където $r_0 = \ell^2/\mu k$ и сме въвели нова константа $\epsilon \equiv Cr_0$.

3.2 Вектор на Лаплас-Рунге-Ленц

Нека разгледаме вектора

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - \mu k \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.4)$$

където $\hat{\mathbf{r}}$ е единичен вектор по посока на r . Препоръчвам ви да си поиграете и да покажете:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

Тоест, \mathbf{A} е запазващ се вектор, който очевидно лежи в равнината на движение. \mathbf{A} сочи към периапсиса. Нека предположим апоапсис при $\phi = \phi_0$. Следователно

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = -Ar \cos(\phi - \phi_0) = \ell^2 - \mu kr, \quad (3.6)$$

което дава

$$r(\phi) = \frac{\ell^2}{\mu k - A \cos(\phi - \phi_0)} = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}, \quad (3.7)$$

където

$$\epsilon = \frac{A}{\mu k}, \quad a(1 - \epsilon^2) = \frac{\ell^2}{\mu k}. \quad (3.8)$$

Тогава орбитата е конично сечение с ексцентрицитет ϵ . Вдигайки на квадрат, получаваме (след малко тривиални сметки):

$$\mathbf{A}^2 = 2\mu\ell^2 \left(E + \frac{\mu k^2}{2\ell^2} \right). \quad (3.9)$$

Финално получихме:

$$a = -\frac{k}{2E}, \quad \epsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}. \quad (3.10)$$

Съществуват 4 типа конични сечения:

- Кръг - $\epsilon = 0$, $E = -\mu k^2/2\ell^2$, радиус $a = \ell^2/\mu k$. Силата сочи към центъра на окръжността
- Елипса - $0 < \epsilon < 1$, $-\mu k^2/2\ell^2 < E < 0$, голяма полуос $a = -k/2E$, малка полуос $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$. Центъра на силата е в единия фокус на елипсата.
- Парабола: $\epsilon = 1$, $E = 0$, силата сочи към фокуса.
- Хипербола: $\epsilon > 1$, $E > 0$, силата сочи към близкия фокус (ако е привличане) или към далечния (ако е отблъскване).

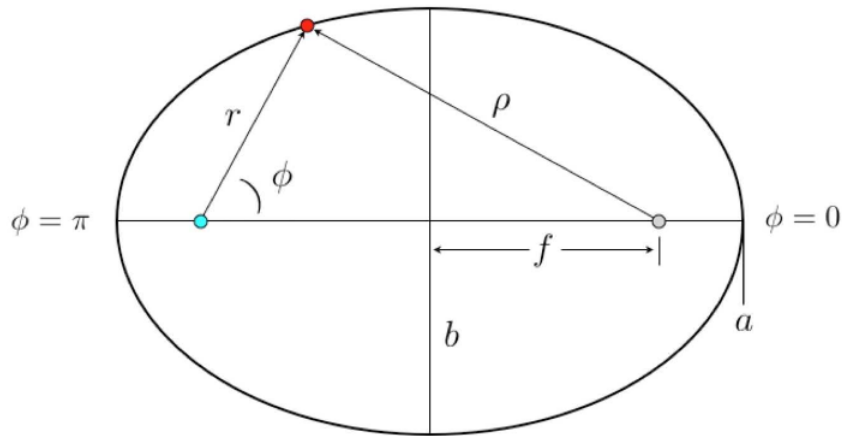
За да се уверим, че кеплеровите орбити са наистина конични сечения, нека разгледаме елипсата дадена на (2). От косинусова теорема дава

$$\rho^2 = r^2 + 4f^2 - 4rf \cos \phi, \quad (3.11)$$

където $f = \epsilon a$ е фокалното разстояние. Знаем, че за всяка точка от елипсата, сборът от разстоянията до левия и десния фокус е константа, и ако вземем $\phi = 0$ виждаме, че тази константа е $2a$. Тогава $\rho = 2a - r$, и

$$(2a - r)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4\epsilon^2 a^2 - 4\epsilon r \cos \phi \Rightarrow r(1 - \epsilon \cos \phi) = a(1 - \epsilon^2). \quad (3.12)$$

От което можем да заключим, че



Фигура 2: Елиптична орбита

$$r_0 = \frac{\ell^2}{\mu k} = a(1 - \epsilon^2). \quad (3.13)$$

Нека сега разгледаме енергията:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \\ &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\ell}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

$$= \frac{\ell^2}{2\mu} \left(\frac{ds}{d\phi} \right)^2 + \frac{\ell^2}{2\mu} s^2 - ks, \quad (3.14)$$

където

$$s = \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\ell^2} (1 - \epsilon \cos \phi). \quad (3.15)$$

Тогава

$$\frac{ds}{d\phi} = \frac{\mu k}{\ell^2} \epsilon \sin \phi, \quad (3.16)$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{d\phi} \right)^2 &= \frac{\mu^2 k^2}{\ell^4} \epsilon^2 \sin^2 \phi \\ &= \frac{\mu^2 k^2 \epsilon^2}{\ell^4} - \left(\frac{\mu k}{\ell^2} - s \right)^2 \\ &= -s^2 + \frac{2\mu k}{\ell^2} s + \frac{\mu^2 k^2}{\ell^4} (\epsilon^2 - 1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Замествайки в израза за енергията, получаваме

$$E = \frac{\mu k^2}{2\ell^2} (\epsilon^2 - 1). \quad (3.18)$$

За хиперболична орбита, имаме $r - \rho = \mp 2a$, в зависимост от това дали сме в режим на привличане или отблъскване. Имаме

$$\begin{aligned} (r \pm 2a)^2 &= 4a^2 \pm 4ar + r^2 = r^2 + 4\epsilon^2 a^2 - 4\epsilon r \cos \phi \\ \Rightarrow r(\pm 1 + \epsilon \cos \phi) &= a(\epsilon^2 - 1). \end{aligned} \quad (3.19)$$

И така стигаме финално до връзката между r и ϕ :

$$r(\phi) = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \epsilon \cos \phi}. \quad (3.20)$$

Това е уравнение на конично сечение. Тоест, наистина, решенията на задачата на Кеплер за две тела са конични сечения.

В следващия файл ще кача още малко информация за задачата на Кеплер и ще сметнем някакви конкретни задачи.

Класическа механика - Централни Сили (Орбитална механика) 2

Иво Илиев

1 Кеплерова задача - продължение

1.1 Период на ограничени кеплерови орбити

От $\ell = mr^2\dot{\phi} = 2\mu\dot{\mathcal{A}}$, следва, че периодът е $\tau = 2\mu\mathcal{A}/\ell$, където $\mathcal{A} = \pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2}$ е площта заградена от орбитата. Това ни дава:

$$\tau = 2\pi \left(\frac{\mu a^3}{k} \right)^{1/2} = 2\pi \left(\frac{a^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

и също

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{GM}{4\pi^2}, \quad (1.2)$$

където $k = Gm_1m_2$ и $M = m_1 + m_2$ е пълната маса. За планетарни орбити, $m_1 = M_\odot$ е масата на Слънцето и $m_2 = m_p$ е масата на планетата. Тогава

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \left(1 + \frac{m_p}{M_\odot} \right) \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \approx \frac{GM_\odot}{4\pi^2}. \quad (1.3)$$

За планетарни маси тази апроксимация е валидна, тоест планетарните орбити около Слънцето не зависят от масата на планетата в много добро приближение (дори и за Юпитер $m_p/M_\odot = 10^{-3}$). Очевидно, тази сметка важи и за сателити около Земята или за всяка система в която масите са с достатъчна разлика.

1.2 (Втора) Космическа Скорост

Прагът за избягване от гравитационен потенциал се случва при $E = 0$. Тъй като $E = T + U$ се запазва, можем да определим втората космическа скорост за тяло на разстояние r от центъра на масите като положим:

$$E = 0 = \frac{1}{2}\mu v_{\text{esc}}^2(t) - \frac{GMm}{r} \Rightarrow v_{\text{esc}}(r) = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}}. \quad (1.4)$$

Както коментирахме в първото упражнение, за обект стоящ върху повърхността на Земята $v_{\text{esc}} = 11.2\text{km/s}$

1.3 Сателити и космически кораби

Сателит в кръгова орбита на разстояние h над земната повърхност има орбитален период

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_E}}(R_E + h)^{3/2}, \quad (1.5)$$

където сме взели $m_{\text{satellite}} \ll M_E$. За ниска земна орбита (low Earth orbit - LEO), $h \ll R_E = 6.37 \times 10^6 \text{m}$, тоест $\tau_{\text{LEO}} = 2\pi\sqrt{R_E/g} = 1.4$ часа.

Нека сега разгледаме сателит на елиптична орбита, чиито най-близка точка до Земята (перигей) е 200 километра над земната повърхност и чиито най-далечна точка до Земята (апогей) е на 7200 километра от земната повърхност. Какъв е орбиталния период на този сателит? Нека погледнем фигура 2 от миналия файл (тази на която е нарисувана елипсата). От там е ясно, че

$$\begin{aligned} d_{\text{apogee}} &= R_E + 7200 \text{km} = 13571 \text{km} \\ d_{\text{perigee}} &= R_E + 200 \text{km} = 6971 \text{km} \\ a &= \frac{1}{2}(d_{\text{apogee}} + d_{\text{perigee}}) = 10071 \text{km}. \end{aligned}$$

Тогава имаме:

$$\tau = \left(\frac{a}{R_E}\right)^{3/2} \cdot \tau_{\text{LEO}} \approx 2.65 \text{ часа}. \quad (1.6)$$

Какво се случва, когато един космически кораб в орбита си включи двигателите? Очевидно, енергията и момента на импулса на орбитата биха се променили, което означава, че и формата и би се променила. Ако двигателите бъдат включени по посока на движение в перигей, то самият перигей остава непроменен, тъй като $v \cdot r = 0$ остава непроменено в тази точка. Енергията обаче се изменя, тоест ексцентрицитетът $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}$ се увеличава. Това е най-ефикасният начин на преместване на сателит на орбита с по-висок ексцентрицитет.

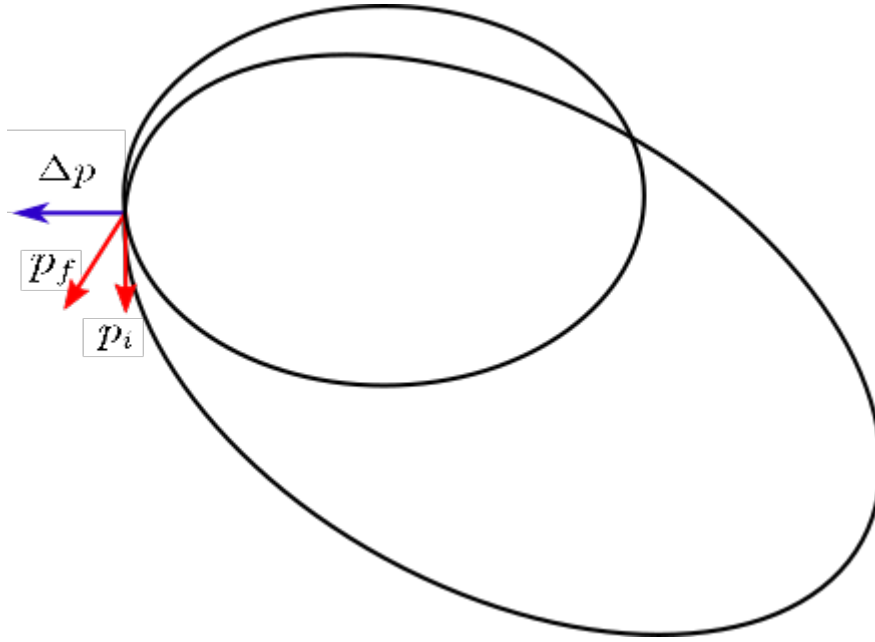
Нека сега разгледаме какво става със сателит в ЛОЕ, когато той започне да губи енергия заради триене. В първите моменти, тъй като силата на триене е малка и атмосферата е изотропна, орбитата ще остане кръгова. Тъй като обаче E намалява, то $\langle T \rangle = -E$ трябва да се *увеличава*, тоест, силата на триене кара космическият апарат да се забърза! Този ефект обикновено се нарича "satellite drag paradox" заради неинтуитивния си характер.

1.4 Примери

Задача 1 Сателит се движе по елиптична орбита. В своя перигей, той получава импулс $\Delta p = p_0 \hat{r}$. Опишете какво се случва.

Тъй като импулсът е радиален, моментът на импулса се запазва. Енергията обаче се изменя със $\Delta E = p_0^2/2\mu$. Тогава

$$\epsilon_f^2 = 1 + \frac{2E_f \ell^2}{k^2} = \epsilon_i^2 + \left(\frac{\ell p_0}{\mu k}\right)^2 \quad (1.7)$$



Фигура 1

Можем да определим голямата полуос на новата орбита:

$$a_f = \frac{\ell^2/\mu k}{1 - \epsilon_f^2} = a_i \cdot \frac{1 - \epsilon_i^2}{1 - \epsilon_f^2} \quad (1.8)$$

$$= \frac{a_i}{1 - (a_i p_0^2/\mu k)} \quad (1.9)$$

Но орбитата отново трябва да е елипса, тоест

$$r_f(\phi) = \frac{\ell^2}{\mu k} \cdot \frac{1}{1 - \epsilon_f \cos(\phi + \delta)} \quad (1.10)$$

С δ сме отбелязали изменението във фазата по орбитата. За да го определим, нека разгледаме наложим:

$$r_i(\pi) = r_f(\pi) = \frac{\ell}{\mu k} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon_i} \quad (1.11)$$

Решавайки за δ получаваме:

$$\delta = \cos^{-1}(\epsilon_i/\epsilon_f). \quad (1.12)$$

Тоест, финално, новата орбита има уравнение:

$$r_f(\phi) = \frac{\ell^2}{\mu k} \cdot \frac{1}{1 - \epsilon_f \cos\left(\phi + \cos^{-1}\left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_f}\right)\right)} \quad (1.13)$$

Схематично, резултатът е представен на графика (1)

Задача 2 Кое е по-енергийно ефективно - да изпращаме ядрен отпадък извън слънчевата система или да го изпращаме във Слънцето?

Решение: Скоростта нужна за напускане на слънчевата система е $v_{\text{esc},\odot}(r) = \sqrt{GM_{\odot}/r}$. На разстояние a_E , имаме $v_{\text{esc},\odot}(a_E) = \sqrt{2}v_E$, където $v_E = \sqrt{GM_{\odot}/a_E} = 2\pi a_E/\tau_E = 29.9\text{km/s}$ е скоростта на земята по нейната орбита. Ясно е, че ще ни е най-изгодно да изстреляме боклука по посока на движението на Земята. В този случай скоростта след напускане на Земята е:

$$u = (\sqrt{2} - 1)v_E = 12.4\text{km/s} \quad (1.14)$$

Скоростта точно над земната атмосфера трябва да е \tilde{u} , където:

$$\frac{1}{2}m\tilde{u}^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mu^2, \quad (1.15)$$

с други думи

$$\tilde{u}^2 = u^2 + v_{\text{esc},E}^2. \quad (1.16)$$

Числено, получаваме че $\tilde{u} = 16.7\text{km/s}$

Нека сега разгледаме втората опция. За да изпратим нещо от Земята в Слънцето, трябва да го поставим на елиптична орбита, чиито перихелий е радиуса на Слънцето $R_{\odot} = 6.98 \times 10^8\text{m}$ и чиито афелий е a_E . Използваме уравнението за кеплеровата орбита:

$$r(\phi) = \frac{\ell^2/\mu k}{1 - \cos \phi} \quad (1.17)$$

Тоест, трябва да решим две уравнения

$$\begin{aligned} r(\phi = \pi) &= R_{\odot} = \frac{1}{1 + \epsilon} \cdot \frac{\ell^2}{\mu k} \\ r(\phi = 0) &= a_E = \frac{1}{1 - \epsilon} \cdot \frac{\ell^2}{\mu k} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Откъдето и намираме:

$$\epsilon = \frac{a_E - R_{\odot}}{a_E + R_{\odot}} = 0.991, \quad (1.19)$$

което очевидно е силно есцентрична орбита. Продължаваме нататък:

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{\mu k} &= \frac{a_E^2 v^2}{G(M_{\odot} + m)} \approx a_E \cdot \frac{v^2}{v_E^2} \\ &= (1 - \epsilon)a_E = \frac{2a_E R_{\odot}}{a_E + R_{\odot}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Откъдето $v^2 = \frac{2R_{\odot}}{a_E + R_{\odot}}v_E^2$ и необходимата скорост измерена спрямо Земята е:

$$u = \left(\sqrt{\frac{2R_{\odot}}{a_E + R_{\odot}}} - 1 \right) v_E \approx -0.904v_E, \quad (1.21)$$

тоест, $u = -27.0\text{km/s}$. Обратният знак означава, че е нужно да изстреляме ракетата с ядрения отпадък в обратна посока на тази на движение на Земята по орбитата и. От $\tilde{u}^2 = u^2 + v_{\text{esc},E}^2$ намираме $\tilde{u} = -29.2\text{km/s}$, което е по-голяма (по абсолютна стойност) скорост от тази която ни беше нужна в първия случай. Тоест, по-евтино е

да изстрелваме ядрен боклук отвъд слънчевата система отколкото да го хвърляме във Слънцето. Отношението на нужната енергия е $\tilde{u}_I^2/\tilde{u}_{II}^2 = 0.327$.

Ако някой е любопитен за още задачи от орбитална механика, препоръчвам да разгледате учебника *Classical Mechanics - A Modern Perspective* на Barger и Olsson, глава 5.4 и 5.5. Там са описани теоретични мисии до външните планети в слънчевата система, включително такива, които използват гравитацията на други планети като гравитационна прашка. Само недейте да гледате твърде много учебника, че някой задачи които ви пращам са от там. :D